Najděte k daným funkcím funkci inverzní a určete jejich definiční obory a obory hodnot:

1) $y = e^{x-1} + 2$

2) $y = \log_2(x+4) - 1$

3) $y = \dfrac{3x+2}{x-1}$

4) $y = \sqrt{x-2} - 5$

5) $y = \arcsin x - 2\pi$

6) $y = arctg(x-1) + \pi$

Inverzní funkce

① Určete inverzní funkci k funkci:

$y = e^{x-1} + 2$

Řešení: $x = e^{y-1} + 2 \quad /-2$

$x - 2 = e^{y-1}$

$\ln(x-2) = y - 1 \quad /+1$

$f^{-1}: \underline{\ln(x-2) + 1 = y}$

$x - 2 > 0$

$x > 2$

$D_f = R = H_{f^{-1}}$

$D_{f^{-1}} = (2; +\infty) = H_f$

② $y = \log_2(x+4) - 1$

$x + 4 > 0$

$x > -4$

Řešení: $x = \log_2(y+4) - 1 \quad /+1$

$x + 1 = \log_2(y+4)$

$2^{x+1} = y + 4 \quad /-4$

$f^{-1}: \underline{2^{x+1} - 4 = y}$

$D_f = (-4; +\infty) = H_{f^{-1}}$

$D_{f^{-1}} = R = H_f$

③ $y = \frac{3x+2}{x-1}$

$x - 1 \neq 0$

$x \neq 1$

Řešení: $x = \frac{3y+2}{y-1} \quad /\cdot(y-1)$

$xy - x = 3y + 2 \quad /-3y + x$

$xy - 3y = 2 + x$

$y(x-3) = 2 + x \quad /:(x-3)$

$f^{-1}: \underline{y = \frac{2+x}{x-3}}$

$x - 3 \neq 0$

$x \neq 3$

$D_f = R \setminus \{1\} = H_{f^{-1}}$

$D_{f^{-1}} = R \setminus \{3\} = H_f$

④ $y = \sqrt{x-2} - 5$

$x - 2 \geq 0 \quad x \geq 2$

$D_f = \langle 2; \infty) = H_{f^{-1}}$

$D_{f^{-1}} = \langle -5; \infty) = H_f$

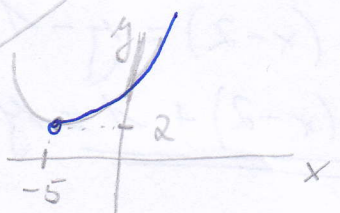
Řešení: $x = \sqrt{y-2} - 5 \quad /+5$

$x + 5 = \sqrt{y-2} \quad /^2$

$(x+5)^2 = y - 2 \quad /+2$

$f^{-1}: \underline{(x+5)^2 + 2 = y}$

graf:



aby ex. inverzní funkce, musí být funkce prostá ⇒ beru jen polovinu paraboly

⑤ $y = \arcsin x - 2\pi$

Řešení: $x = \arcsin y - 2\pi \quad /+2\pi$

$x + 2\pi = \arcsin y$

$f^{-1}: \underline{\sin(x+2\pi) = y}$

$D_f = \langle -1; 1 \rangle = H_{f^{-1}}$

$D_{f^{-1}} = \langle -\frac{5}{2}\pi, -\frac{3}{2}\pi \rangle = H_f$

aby ex. inv. fce, tak beru sinus na int. $\langle -\pi/2; \pi/2 \rangle \Rightarrow$

$-\frac{\pi}{2} \leq x + 2\pi \leq \frac{\pi}{2} \quad /-2\pi$

$-\frac{\pi}{2} - 2\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} - 2\pi$

$-\frac{5}{2}\pi \leq x \leq -\frac{3}{2}\pi$

⑥ $y = \operatorname{arctg}(x-1) + \pi$

Řešení: $x = \operatorname{arctg}(y-1) + \pi \quad /-\pi$

$x - \pi = \operatorname{arctg}(y-1)$

$\operatorname{tg}(x-\pi) = y - 1 \quad /+1$

$f^{-1}: \underline{\operatorname{tg}(x-\pi) + 1 = y}$

$D_f = R = H_{f^{-1}}$

$D_{f^{-1}} = (\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi) = H_f$

aby ex. fce inv. tak tg se omezí na $(-\pi/2; \pi/2) \Rightarrow$

$-\pi/2 < x - \pi < \pi/2 \quad /+\pi$

$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi$