

Derivace - užití

Najděte intervaly monotonie uvedených funkcí

(a) $y = x^3 - x$

(b) $y = x^5 - 15x^3 + 3$

(c) $y = \frac{x}{1+x^2}$

(d) $y = |x+1| + |x-1|$

(e) $y = \frac{4}{x} + \frac{1}{1-x}$

(f) $y = x + \frac{x}{x^2-1}$

(g) $y = e^{x^2+8x+12}$

(h) $y = x^2 - 1 + |x^2 - 1|$

Určete intervaly, na kterých jsou dané funkce konvexní, popř. konkávní, a najděte všechny jejich inflexní body

(a) $y = 5x^2 + 20x + 7$

(b) $y = x(1-x)^2$

(c) $y = x^4 + 2x^3 - 12x^2$

(d) $y = 3x^5 - 5x^4 + 4$

(e) $y = 2 - |x^2 - 2|$

(f) $y = x^2 - 1 + \sqrt[3]{x^2}$

(g) $y = x + \frac{1}{x^2}$

(h) $y = \frac{x}{1+x^2}$

(i) $y = x + \frac{2x}{1-x^2}$

(j) $y = \frac{x^3}{x^2+27}$

(k) $y = x + \sqrt[3]{x^5}$

(l) $y = 3 - (x+2)^{\frac{7}{5}}$

(m) $y = 4(x-1)^{\frac{5}{2}} + 20(x-1)^{\frac{3}{2}}$

(n) $y = (x-1)^{\frac{1}{3}}(x+1)^{\frac{2}{3}}$

(o) $y = x \ln x$

(p) $y = 1 - \ln(x^2 - 9)$

(q) $y = x^x$

(r) $y = 3x^2 - x^3$

Najděte absolutní maxima a minima funkcí na daném intervalu:

(a) $y = x^2 - 6x + 10, \quad \langle -1, 5 \rangle$

(b) $y = x^3 - 3x + 20, \quad \langle -3, 3 \rangle$

(c) $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1, \quad \langle -2, 1 \rangle$

(d) $y = |x^2 - 6x + 5|, \quad \langle -5, 5 \rangle$

(e) $y = x + \frac{1}{x-1}, \quad \langle -4, 0 \rangle$

(f) $y = x + \frac{2x}{x^2-1}, \quad \langle 1.01, 2 \rangle$

(g) $y = \sqrt[3]{(x^2-x)^2}, \quad \langle -3, 2 \rangle$

(h) $y = x - 2 \ln x, \quad \langle 1, e \rangle$

(i) $y = x^2 \ln x, \quad \langle 1, e \rangle$

(j) $y = x^x, \quad (0, +\infty)$

(k) $y = 2 \sin x + \cos 2x, \quad \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$

(l) $y = \cos 2x - 2x, \quad \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$

Najděte všechny lokální extrémy funkcí a vypočítejte funkční hodnoty v nich:

(a) $y = x^2(x-6)$

(b) $y = x^3 - 12x - 6$

(c) $y = 4x^3 - 18x^2 + 27x - 7$

(d) $y = 4x^3 - 3x^2 - 36x - 5$

(e) $y = -x^4 - 2x^2 + 3$

(f) $y = x(x-1)^2(x-2)^3$

(g) $y = \frac{x-1}{x}$

(h) $y = \frac{x^2}{2} + \frac{8}{x^3}$

(i) $y = x + \frac{2x}{1+x^2}$

(j) $y = \frac{10}{4x^3-9x^2+6x}$

(k) $y = 4|x+4| - 5|x| + 2|x-1|$

(l) $y = x^3 + 2|x|$

(m) $y = 1 + \sqrt{|x|}$

(n) $y = \sqrt{6x-x^2}$

(o) $y = 3 - 2\sqrt[3]{x^2}$

(p) $y = (x^2-1)^{\frac{2}{3}}$

(q) $y = \sqrt[3]{2x^3+3x^2-36x}$

(r) $y = \sin x + \cos x$

(s) $y = 4x - \operatorname{tg} x$

(t) $y = (\frac{1}{2} - x) \cos x + \sin x - \frac{x^2-x}{4}$

(u) $y = \arctg |x-1|$

(v) $y = \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$

Řešení:

(a) $x \in (-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}) \cup (\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$ rost., $x \in (-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ kles.; (b) $x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$ rost., $x \in (-3, 3)$ kles.; (c) $x \in (-1, 1)$ rost., $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ kles.; (d) $x \in (-\infty, -1)$ kles., $x \in (-1, 1)$ neroste ani neklesá, $x \in (1, +\infty)$ rost.; (e) $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \frac{2}{3}) \cup (2, +\infty)$ kles., $x \in (\frac{2}{3}, 1) \cup (1, 2)$ rost.; (f) $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$ rost., $x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ kles.; (g) $x \in (-\infty, -4)$ kles., $x \in (-4, +\infty)$ rost.; (h) $x \in (-\infty, -1)$ kles., $x \in (-1, 1)$ neroste ani neklesá, $x \in (1, +\infty)$ rost.

(a) $(-\infty, +\infty)$ konvexní; (b) $(-\infty, \frac{2}{3})$ konkávní, $(\frac{2}{3}, 1)$ konvexní, $x = \frac{2}{3}$ inflexní bod; (c) $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ konvexní, $(-2, 1)$ konkávní, $x_1 = -2, x_2 = 1$ inflexní body; (d) $(1, +\infty)$ konvexní, $(-\infty, 1)$ konkávní, $x = 0$ inflexní bod; (e) $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ konvexní, $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ konkávní; (f) $(-\infty, -\frac{1}{3\sqrt{3}}) \cup (\frac{1}{3\sqrt{3}}, +\infty)$ konvexní, $(-\frac{1}{3\sqrt{3}}, 0) \cup (0, \frac{1}{3\sqrt{3}})$ konkávní, $x_1 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}, x_2 = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ inflexní body; (g) $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ konvexní; (h) $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$ konvexní, $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$ konkávní, $x_1 = -\sqrt{3}, x_2 = 0, x_3 = \sqrt{3}$ inflexní body; (i) $(0, 1) \cup (1, +\infty)$ konvexní, $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ konkávní, $x = 0$ inflexní bod; (j) $(-\infty, -9) \cup (0, 9)$ konvexní, $(-9, 0) \cup (9, +\infty)$ konkávní, $x_1 = -9, x_2 = 0, x_3 = 9$ inflexní body; (k) $(0, +\infty)$ konvexní, $(-\infty, 0)$ konkávní, $x = 0$ inflexní bod; (l) $(-\infty, -2)$ konvexní, $(-2, +\infty)$ konkávní, $x = -2$ inflexní bod; (m) $(1, +\infty)$ konvexní; (n) $(-\infty, -1) \cup (-1, 1)$ konvexní, $(1, +\infty)$ konkávní; (o) $(0, +\infty)$ konvexní; (p) $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$ konvexní; (q) $(0, +\infty)$ konvexní; (r) $(-\infty, 1)$ konvexní, $(1, +\infty)$ konkávní, $x = 1$ inflexní bod

(a) $-1 \dots \max., f(-1) = 17; 3 \dots \min., f(3) = 1; (b) -3 \dots \min., f(-3) = 2; (c) -2 \dots \min., f(-2) = -151; 1 \dots \max.; f(1) = 2; (d) -5 \dots \max., f(-5) = 60; 1 \dots \min., f(1) = 0; (e) 0 \dots \min., f(0) = -1; (f) 1.01 \dots \max., f(1.01) \doteq 101.5; 2 \dots \min., f(2) = \frac{10}{3}; (g) 0.1 \dots \min., f(0) = 0, f(1) = 0; (h) 1 \dots \max., f(1) = 1; 2 \dots \min., f(2) = 2 - 2 \ln 2; (i) e \dots \max., f(e) = e^2; 1 \dots \min., f(1) = 0; (j) e^{-1} \dots \min., f(e^{-1}) \doteq 0.69; (k) -\frac{\pi}{2} \dots \max., f(-\frac{\pi}{2}) = -1 + \pi; \frac{\pi}{2} \dots \min., f(\frac{\pi}{2}) = -1 - \pi$

(a) $0 \dots \max., f(0) = 0; 4 \dots \min., f(4) = -32; (b) 2 \dots \min., f(2) = -10; -2 \dots \max., f(-2) = 10; (c) \text{extrémy neexistují}; (d) 2 \dots \min., f(2) = -57; -\frac{3}{2} \dots \max., f(-\frac{3}{2}) = \frac{115}{4}; (e) 0 \dots \max., f(0) = 3; (f) 1 \dots \max., f(1) = 0; \frac{5+\sqrt{13}}{6} \dots \min., f(\frac{5+\sqrt{13}}{6}) \doteq -0.05; \frac{5-\sqrt{13}}{6} \dots \min., f(\frac{5-\sqrt{13}}{6}) \doteq -0.76; (g) \text{extrémy neexistují}; (h) \sqrt[5]{24} \dots \min., f(\sqrt[5]{24}) = \sqrt[5]{24^2} - \frac{8}{\pi^{\frac{1}{5}}}; (i) \text{extrémy neexistují}; (j) 1 \dots \max., f(1) = 10; \frac{1}{5} \dots \min., f(\frac{1}{5}) = 8; (k) 0 \dots \max., f(0) = 18; -4, 1 \dots \min., f(-4) = -10, f(1) = 15; (l) \sqrt{\frac{2}{3}} \dots \min., f(\sqrt{\frac{2}{3}}) = \frac{-4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}; 0 \dots \max., f(0) = 0; (m) 0 \dots \min., f(0) = 1; (n) 3 \dots \max., f(3) = 3; (o) 0 \dots \max., f(0) = 3; (p) 0 \dots \max., f(0) = 1; 1, -1 \dots \min., f(1) = f(-1) = 0; (q) 2 \dots \min., f(2) = -\sqrt[3]{44}; -3 \dots \max., f(-3) = 3\sqrt[3]{3}; (r) $\frac{\pi}{4} + 2k\pi \dots \max., f(\frac{\pi}{4} + 2k\pi) = \sqrt{2}; \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \dots \min., f(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi) = -\sqrt{2}; (s) \frac{\pi}{3} + k\pi \dots \max., f(\frac{\pi}{3} + k\pi) = 4(\frac{\pi}{3} + k\pi) - \sqrt{3}; \frac{2\pi}{3} + k\pi \dots \min., f(\frac{2\pi}{3} + k\pi) = 4(\frac{2\pi}{3} + k\pi) + \sqrt{3}; (t) \frac{1}{2}, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \dots \max., f(\frac{1}{2}) = \sin \frac{1}{2} + \frac{1}{16}; \frac{\pi}{6} + 2k\pi \dots \min.; (u) 1 \dots \min., f(1) = 0; (v) 1 \dots \max., f(1) = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$$

Př. 1

Zjistěte, zda jsou funkce v bodě $a = 4$ rostoucí nebo klesající, konvexní nebo konkávní:

- $y = x^3 - 49x + 76$

- $y = 5x^2 + e^x$

- $y = 2\sqrt{x}$

[klesá, konvexní; roste, konvexní; roste, konkávní]

Př. 2

Zjistěte, zda je funkce v bodě $a = \frac{\pi}{3}$ rostoucí nebo klesající:

- $y = 2\sin(x) - \cos(x)$

[roste]

Př.3:

Je dána funkce $f : y = \ln(x^2 + 2x + 2)$ a bod $a = 5$.

- Určete definiční obor funkce.
- Určete, zda je funkce rostoucí nebo klesající v bodě a .
- Určete intervaly, kde je funkce rostoucí a kde klesající.
- Najděte lokální extrémy.

[R; roste, klesá na $(-\infty, -1)$, roste na $(-1, \infty)$, v $x = -1$ lok. minimum 0]

Př.4:

Je dána funkce $f : y = \frac{x^2 - 3x}{x^2 + 3}$ a bod $a = 3$.

- Určete definiční obor funkce.
- Určete, zda je funkce rostoucí nebo klesající v bodě a .
- Určete rovnici tečny v bodě a .
- Najděte absolutní minimum a maximum na intervalu $\langle -5, 3 \rangle$.

[R; roste; $y = \frac{x}{4} - \frac{3}{4}$;

SB=-3,1 ABS.MIN=0, ABS.MAX=1,5]

Př.5: Pomocí diferenciálu určete přibližnou hodnotu:

$$1,07^{10}$$

$$\sqrt{99,97}$$

$$\ln 0,994$$

$$\sqrt[3]{8,003}$$

[1,7; 9,9985; -0,006; 2,00025]

Př.6: Určete rovnici tečny bodě $x = 3$ k funkci $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 + 3}$.

Aproximujte (= vypočítejte pomocí diferenciálu) hodnotu $f(2,94)$.

$$[y = \frac{x}{4} - \frac{3}{4}, f(2,94) = -0,015]$$

Vypočtete limity l'Hospitalovým pravidlem (pokud nelze pravidlo použít, určete je jinak)

- | | | |
|--|---|---|
| (a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$ | (b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$ | (c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$ |
| (d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{x^5 - 3x + 2}$ | (e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^n}{1 - x^m}; m, n \in \mathbb{N}$ | (f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + 3x)^4 - 1}{x^2}$ |
| (g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}{x}$ | (h) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{6+x} - 2}{x + 2}$ | (i) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x^3} - 8}$ |
| (j) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{\frac{2}{3}} - 1}{x^{\frac{3}{5}} - 1}$ | (k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{1+x} - 1}{x}$ | (l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$ |
| (m) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$ | (n) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x \cos x}{\sin 2x - \cos x}$ | (o) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$ |
| (p) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ | (q) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3}$ | (r) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\ln x}$ |
| (s) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\ln(\sin x)}$ | (t) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}$ | (u) $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x}$ |

Řešení:

(a) 4; (b) $\frac{5}{2}$; (c) 1; (d) 0; (e) $\frac{n}{m}$; (f) $+\infty$; (g) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; (h) $\frac{1}{4}$; (i) $\frac{1}{12}$; (j) $\frac{10}{9}$; (k) $\frac{1}{4}$; (l) 1; (m) -2 ; (n) $+\infty$; (o) $+\infty$; (p) 0; (q) $+\infty$; (r) 1; (s) 1; (t) 1; (u) 1

Najděte rovnici tečny a normály ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $x = a$

- | | |
|--|---|
| (a) $y = \sqrt{x}, a = 9$ | (b) $y = x^3 + 2x, a = 1$ |
| (c) $y = \frac{3x - 4}{2x - 3}, a = 2$ | (d) $y = 2\sqrt{2} \sin x, a = \frac{\pi}{4}$ |
| (e) $y = \ln(x + 1), a = 0$ | (f) $y = e^{-x} \cos 2x, a = 0$ |

(kombinované studium pouze tečnu)

Řešení:

- (a) $t: x - 6y + 9 = 0, n: 6x + y - 57 = 0$; (b) $t: 5x - y - 2 = 0, n: x + 5y - 16 = 0$;
 (c) $t: x + y - 4 = 0, n: x - y = 0$; (d) $t: 2x - y + 2 - \frac{\pi}{2} = 0, n: x + 2y - 4 - \frac{\pi}{4} = 0$;
 (e) $t: y = x, n: y = -x$; (f) $t: x + y - 1 = 0, n: x - y + 1 = 0$