Asymptoty

Určete asymptoty grafů funkcí:

a) $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$

b) $f(x)=\dfrac{8}{4-x^2}$

c) $f(x)=\dfrac{x^2-3}{2x-4}$

d) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x+3}$

e) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-1}$ 2

f) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{2x+4}$

g) $f(x)=\dfrac{4}{x^2-4}$

h) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$

i) $f(x)=\dfrac{x-2}{x+1}$

j) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$

k) $f(x)=\dfrac{2x-5}{x^2}$

l) $f(x)=\dfrac{2x^2-5}{x^2+4}$

m) $f(x)=3xe^{-2x^2}$

n) $f(x)=\dfrac{3x^2+2x-1}{3-x}$

o) $f(x)=-5x^3\ln(4x)$

p) $f(x)=\dfrac{-x+3}{x^2}$

q) $f(x)=\dfrac{-x^2+3}{3x^2+8}$

r) $f(x)=\dfrac{4x^2-2x-1}{x+1}$

s) $f(x)=-2x^{-2}e^{x^2}$

t) $f(x)=-4x^3e^{x^2+1}$

u) $f(x)=4x\ln(5x)$

Řešení:

a) $x = 1$, $y = 1$
b) $x = -2$, $x = 2$, $y = 0$
c) $x = 2$, $y = 0{,}5x + 1$
d) $x = -3$, $y = x - 3$
e) $x = 1$, $y = x + 1$
f) $x = -2$, $y = 0{,}5x - 1$
g) $x = 2$, $x = -2$, $y = 0$
h) $x = 0$, $y = x$
i) $x = -1$, $y = 1$
j) $x = 1$, $x = -1$, $y = x$
k) $x = 0$, $y = 0$
l) $y = 2$
m) $y = 0$
n) $x = 3$, $y = -3x - 11$
o) nemá žádné asymptoty
p) $x = 0$, $y = 0$
q) $y = -1/3$
r) $x = -1$, $y = 4x - 6$
s) $x = 0$
t) nemá žádné asymptoty
u) nemá žádné asymptoty

ⓐ bez směrnice $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x}{x-1} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty \checkmark \implies \underline{\underline{x = 1}}$$

se směrnicí $y = kx + q$

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x^2 - x} = 0$$

$$q = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x-1} - 0 = 1$$

$\Big\}$ $\underline{\underline{y = 1}}$

ⓑ bez směrnice $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{8}{4-x^2} = \left[\frac{8}{0^-}\right] = -\infty \implies \underline{\underline{x = 2}}$$

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{8}{4-x^2} = \left[\frac{8}{0^+}\right] = +\infty \implies \underline{\underline{x = -2}}$$

se směrnicí

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{8}{4x - x^3} = 0$$

$$q = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{8}{4-x^2} - 0 = 0$$

$\Big\}$ $\underline{\underline{y = 0}}$

ⓒ bez směrnice $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2-3}{2x-4} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty \implies \underline{\underline{x = 2}}$$

se směrnicí

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2-3}{2x^2-4x} = \frac{1}{2}$$

$$q = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2-3}{2x-4} - \frac{1}{2}x = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2-3-x(x-2)}{2(x-2)} =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2-3-x^2+2x}{2x-4} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x-3}{2x-4} = 1$$

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{2}x + 1}}$$

m) $f(x) = 3xe^{-2x^2}$

$D_f = \mathbb{R}$

$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3xe^{-2x^2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} 3e^{-2x^2} = [3e^{-\infty}] = 0$

$q = \lim_{x\to\pm\infty} 3xe^{-2x^2} - 0 = \lim_{x\to\pm\infty} 3xe^{-2x^2} = [3\cdot(\pm\infty)\cdot 0] =$

$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x}{e^{2x^2}} \overset{LH}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3}{e^{2x^2}\cdot 4x} = \left[\frac{3}{\pm\infty}\right] = 0$

$\boxed{y = 0}$

o) $f(x) = -5x^3 \ln(4x)$

$D_f = (0, \infty)$

$\lim_{x\to 0^+} -5x^3 \cdot \ln(4x) = [-5\cdot 0\cdot(-\infty)] = \lim_{x\to 0^+} \frac{-5\ln 4x}{x^{-3}} \overset{LH}{=}$

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-5\cdot\frac{1}{4x}\cdot 4}{-3x^{-4}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{-5}{x}}{\frac{-3}{x^4}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-5}{x}\cdot\frac{x^4}{-3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{5}{3}x^3 = \underline{\underline{0}}$

není as. bez směrnice $x=0$

$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{-5x^3\ln(4x)}{x} = \lim_{x\to\infty} -5x^2\ln(4x) = [-5\cdot\infty\cdot\infty] = -\infty$

není as. se směrnicí

s) $f(x) = -2\cdot x^{-2} e^{x^2}$

$x \neq 0 \quad \left(x^{-2} = \frac{1}{x^2}\right)$

$D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\lim_{x\to 0^+} -2x^{-2}e^{x^2} = \left[-2\cdot\frac{1}{0^+}\cdot 1\right] = -\infty \Rightarrow$ as. bez směrnice $\boxed{x=0}$

$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2x^{-2}e^{x^2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2e^{x^2}}{x^3} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] \overset{LH}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2e^{x^2}\cdot 2x}{3x^2} =$

$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-4e^{x^2}}{3x} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] \overset{LH}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-4e^{x^2}\cdot 2x}{3} = \infty$ není as. se směrnicí