HODNOST MATICE

DEFINICE:
Hodnost matice udává maximální počet lineárně nezávislých řádků v matici.

VĚTA:
Nenulové řádkové vektory v matici v Gaussově tvaru jsou lineárně nezávislé.

DEFINICE: ELEMENTÁRNÍ ÚPRAVY MATICE, EKVIVALENTNÍ MATICE
Elementární úpravy matice jsou tyto úpravy:

- záměna pořadí řádků;
- vynásobení (vydělení) některého řádku matice nenulovým reálným číslem;
- přičtení libovolného násobku některého řádku matice k jinému řádku matice.

Provedením konečného počtu elementárních úprav na matici **A** dostaneme matici **B**, která je **ekvivalentní** s původní maticí **A.** Přechod k ekvivalentní matici značíme **A**$\sim$**B** .

VĚTA:
Ekvivalentní matice mají stejnou hodnost.

VĚTA :
Nechť $\mathbf{A}^T$ je transponovaná matice k matici **A**. Pak je h(**A**)= h($\mathbf{A}^T$).
(Pozn: Proto všechny elementární úpravy matice můžeme dělat i se sloupci, nejen s řádky.)

DEFINICE REGULÁRNÍ A SINGULÁRNÍ MATICE :
Říkáme, že čtvercová matice řádu n je **regulární**, jestliže $h(\mathbf{A}) = n$, a je **singulární**, jestliže $h(\mathbf{A}) < n$.

SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

VĚTA: FROBENIOVA VĚTA O ŘEŠITELNOSTI SOUSTAV LINEÁRNÍCH ROVNIC
Pro soustavu lineárních rovnic **AX = B** o *n* neznámých, kde $\mathbf{A}_r$ **= (A | B)** je rozšířená matice soustavy, platí:

- když $h(A) \neq h(A_r)$, pak soustava nemá řešení
- když $h(A) = h(A_r) = n$, pak soustava má právě jedno řešení
- když $h(A) = h(A_r) < n$, pak soustava má nekonečně mnoho řešení ($n - h(A) =$ počet parametrů).

DEFINICE:
Soustava, která má tvar **AX = 0**, tj. vektor pravých stran je nulový vektor, se nazývá **homogenní soustava.**

VĚTA:
Homogenní soustava má vždy řešení.
(Pozn.: buď má jen jedno řešení ze samých nul = triviální řešení nebo jich má nekonečně mnoho)

VĚTA:
Soustava rovnic AX = B, kde A je regulární matice, má vždy jediné řešení.

DETERMINANTY

VĚTA – ROZVOJ DETERMINANTU:
Subdeterminant determinantu n-tého řádu je determinant řádu nižšího než n, který dostaneme z původního determinantu vynecháním stejného počtu svislých a vodorovných řad.
Algebraický doplněk A_{ij} **k prvku** a_{ij} v determinantu n-tého řádu je subdeterminant $(n-1)$-ho řádu získaný vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce z původního determinantu a násobený číslem $(-1)^{i+j}$.
Pro **determinant** čtvercové matice řádu *n* platí **det A** $= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$,
kde i je index libovolného zvoleného řádku, což znamená, že prvky i-tého řádku násobíme jejich algebraickými doplňky a tyto výsledky sečteme. Tento postup se nazývá **rozvoj podle i-tého řádku**. Rozvoj lze též provést pomocí libovolného sloupce.

VĚTA:
Determinant trojúhelníkové matice je roven součinu prvků na diagonále.

VĚTA – VLASTNOSTI DETERMINANTU
Nechť A, B jsou čtvercové matice stejného řádu. Potom platí:

- det A = det A^T
- má-li matice A jednu řadu složenou ze samých nul, pak je $\det A = 0$.
- je-li v matici A jeden řádek násobkem jiného řádku (či jeden sloupec jiného sloupce), pak det A = 0.
- zaměníme-li v matici dva řádky (resp. dva sloupce) determinant změní znaménko.
- vynásobíme-li nějaký řádek (resp. sloupec) číslem c, pak se zvětší c-krát celý determinant
- přičteme-li v matici k řádku násobek jiného řádku (resp. k sloupci násobek jiného sloupce), pak se determinant nezmění

V
O
VĚTA:
Determinant regulární matice je vždy různý od nuly, determinant singulární matice je roven nule.

Cramerovo pravidlo
je metoda pro řešení soustav lineárních rovnic pomocí determinantů. Tuto metodu lze použít, pokud matice A je regulární, tedy pouze, když má soustava jedno řešení.
Pro neznámou x_j v soustavě lineárních rovnic platí:

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A}$$

kde $\mathbf{det A_j}$ dostaneme z determinantu matice soustavy **A** záměnou j-tého sloupce za sloupec pravých stran.

OPERACE S MATICEMI

DEFINICE: SOUČET DVOU MATIC, NÁSOBENÍ MATICE REÁLNÝM ČÍSLEM
Mějme dvě matice **A, B** stejného typu (m,n). Součet dvou matic je matice **A+B** téhož typu, která má prvky $a_{ij}+b_{ij}$ pro i = 1, ..., m; j = 1, ..., n .
Mějme matici **A** typu (m,n). Je dáno reálné číslo r$\in$ R. r-násobek matice **A** je matice r**A** stejného typu, která má prvky ra_{ij} pro i = 1,...,m ; j = 1,..., n .

DEFINICE: SOUČIN MATIC
Mějme dvě matice, **A** = (a_{ij}) typu (m,p), **B** = (b_{ij}) typu (p,n). Součin **C** = (c_{ij}) je matice typu (m,n), kde každý prvek c_{ij} je skalárním součinem i-tého řádku matice **A** s j-tým sloupcem matice **B**, Výsledná matice **C** je pak typu (m,n).

V
O
DEFINICE: INVERZNÍ MATICE
Inverzní matice A^{-1} existuje pouze k regulární matici a je určena jednoznačně. Platí pro ni

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathrm{J}.$$

(J = jednotková matice)

VĚTA:
Mějme čtvercovou regulární matici A. Inverzní matici $\mathbf{A}^{-1}$ lze vypočítat pomocí adjungované matice G, což je transponovaná matice algebraických doplňků. Platí:

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathrm{A}} \cdot \mathrm{G}$$

Pro matici druhého řádu platí:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$