1) Určete definiční obor funkce:

$$f(x)=\sqrt{x^2-2x-8}+\ln\frac{5-x}{x+3}$$

2) Vypočítejte limitu:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{1-e^{-2x}}$$

3) Určete intervaly, na kterých je funkce $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ konvexní či konkávní, najděte inflexní body.

4) Určete rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f(x)=4\sqrt{x^2+7}$ v bodě T = [3; ?].

1) Určete definiční obor funkce:

$$f(x)=\sqrt{\frac{x}{2+x}}+\ln\left(-x^2+9\right)$$

2) Vypočítejte limitu:

$$\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x}$$

3) Určete intervaly, na kterých je funkce $f(x)=e^{x^2+x}$ rostoucí či klesající, najděte lokální extrémy.

4) Najděte všechny asymptoty funkce $f(x)=\dfrac{3x^2+x}{1+x}$.

1) Určete první derivaci funkce a výsledek zjednodušte:

$$f(x)=\sqrt{arctg\,\frac{2x-1}{x+2}}$$

2) Vypočítejte limitu

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\ln x}{x^2+x+1}$$

3) Určete absolutní extrémy funkce $f(x)=x^3-6x^2$ na intervalu $\langle -1;5\rangle$.

4) Najděte inverzní funkci k funkci $f(x): y=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+2$. Určete definiční obor a obor hodnot obou dvou funkcí.

1) Určete definiční obor funkce:

$$f(x) = \frac{\ln\left(x^2 - x - 2\right)}{\sqrt{4 - x^2}}$$

2) Vypočítejte limitu

$$\lim_{x \to 0+} x \ln x$$

3) Určete intervaly, na kterých je funkce $f(x) = e^{x^2}$ konvexní či konkávní, najděte inflexní body.

4) Určete rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ v bodě T[1;?] a pomocí diferenciálu vypočítejte přibližnou hodnotu funkce f(0,99).

1) Určete definiční obor funkce:

$$f(x) = \arccos\frac{x+2}{7} - \sqrt{x^2 - x - 6}$$

2) Vypočítejte limitu:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x - arctgx}{x^3}$$

3) Určete intervaly, na kterých je funkce $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ rostoucí či klesající, najděte lokální extrémy.

4) Najděte rovnici inverzní funkce k funkci $f(x) = \ln(x+1) - 4$. Určete definiční obor a obor hodnot obou funkcí.

1) Určete definiční obor funkce:

$$f(x)=\frac{\ln\left(-x^2+x+12\right)}{\sqrt{2x^2-2}}$$

2) Vypočítejte limitu:

$$\lim_{x\to 0+} x\left(1-\ln x\right)$$

3) Určete intervaly, na kterých je funkce $f(x)=\frac{9}{x}+\frac{9}{x^2}$ konvexní či konkávní, najděte inflexní body.

4) Určete rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ v bodě T[1,?].

1) Určete definiční obor funkce:

$$f(x) = \arccos \frac{x-2}{5} - \sqrt{x^2 - 4x}$$

2) Vypočítejte limitu:

$$\lim_{x \to \infty} x \left(arctgx - \frac{\pi}{2} \right)$$

3) Určete intervaly, na kterých je funkce $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ rostoucí či klesající a najděte lokální extrémy.

4) Najděte rovnice všech asymptot funkce $f(x) = \dfrac{4x^2+3}{x+5}$.

1) Určete definiční obor funkce:

$$f(x)=\sqrt{\frac{2x+4}{3-x}}+\ln\left(-x^2+2x\right)$$

2) Vypočítejte limitu:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\cos 2x-1}{tgx}$$

3) Určete intervaly, na kterých je funkce $f(x)=\dfrac{3}{x+2}$ konvexní či konkávní, najděte inflexní body

4) Určete rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f(x)=2x+xe^{2x}$ v bodě T[0,?].

1) Určete definiční obor funkce:

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + x} + \ln \frac{2x+1}{1-2x}$$

2) Vypočítejte limitu

$$\lim_{x \to 0} \frac{arctg\, 4x}{5x + x^2}$$

3) Určete intervaly, na kterých je funkce $f(x) = x + \frac{2x}{1-x^2}$ konvexní či konkávní, najděte inflexní body.

4) Najděte všechny asymptoty funkce $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x-2}$.

1) Určete definiční obor funkce:

$$f(x)=\frac{\ln\left(3x-x^2\right)}{\sqrt{x^2-7x+10}}$$

2) Vypočítejte limitu

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$$

3) Určete intervaly, na kterých je funkce $f(x)=\dfrac{x^2+3}{1-x}$ rostoucí či klesající, najděte lokální extrémy.

4) Určete inverzní funkci k funkci $f(x)=\dfrac{2x-1}{4-3x}$. Určete definiční obor a obor hodnot obou funkcí.

1) Určete definiční obor funkce:

$$f(x) = \cos x - \sqrt{-x^2 + x + 12} + \ln \frac{5-x}{x-1}$$

2) Vypočítejte limitu

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin 3x}{arctg\, 5x}$$

3) Určete intervaly, na kterých je funkce $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ rostoucí či klesající, najděte lokální extrémy.

4) Najděte všechny asymptoty funkce $f(x) = \frac{2x^2+3x}{x+2}$.

1) Určete definiční obor funkce:

$$f(x)=\sqrt{\frac{x+4}{2-x}}+\arccos\frac{x+2}{3}$$

2) Vypočítejte limitu

$$\lim_{x\to 0+} x^3 \ln x$$

3) Určete intervaly, na kterých je funkce $f(x)=x^2 e^{\frac{1}{x}}$ konvexní či konkávní, najděte inflexní body.

4) Určete rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f(x)=\dfrac{1+x^3}{x-1}$ v bodě T = [2; ?].

A1

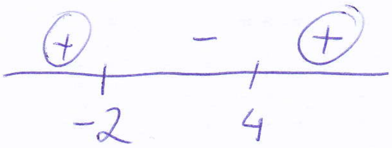
1) $Df \quad f(x) = \sqrt{x^2-2x-8} + \ln \frac{5-x}{x+3}$

$x^2-2x-8 \geq 0$ $\qquad \frac{5-x}{x+3} > 0$ 1b

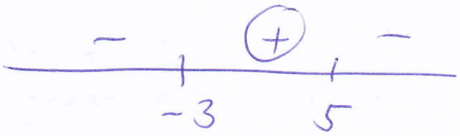
$(x-4)(x+2) \geq 0$

$x=4 \quad x=-2$ $\qquad 5-x=0 \quad x+3=0$

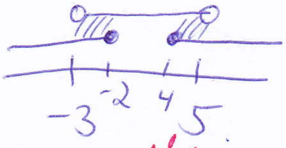
$\qquad x=5 \qquad x=-3$



1b



1b



$Df = (-3,-2\rangle \cup \langle 4,5)$ 1b

2) $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{1-e^{-2x}} = \left[\frac{0}{0}\right]^{1b} \overset{LH\,1b}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{-e^{-2x}\cdot(-2)}$ 1b $= \frac{1}{-1\cdot(-2)} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$ 1b

3) $f(x) = \frac{x+1}{x-1} \qquad Df = R \setminus \{1\}$ 1b

$f' = \frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$ 1b

$f'' = \frac{-(-2)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{4}{(x-1)^3}$ 1b $\quad \frac{4}{(x-1)^3} = 0$

$4 \neq 0$

konkávní $(-\infty,1)$, konvexní $(1,\infty)$, in. b. nejsou 1b

4) $f(x) = 4\sqrt{x^2+7} \qquad T[3, ?]$

$y_0 = 4\sqrt{9+7} = 16$ 1b

$f' = 4\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+7}}\cdot 2x = \frac{4x}{\sqrt{x^2+7}} \qquad f'(3) = \frac{4\cdot 3}{\sqrt{9+7}} = 3$ 1b

$t: y = 3(x-3)+16 \qquad n: y = -\frac{1}{3}(x-3)+16$

$\underline{\underline{y = 3x+7}}$ 1b $\qquad \underline{\underline{y = -\frac{1}{3}x + 17}}$ 1b

A2

1) D_f $\quad f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{2+x}} + \ln(-x^2+9)$

$$\frac{x}{2+x} \geq 0 \qquad 2+x \neq 0 \qquad -x^2+9 > 0 \quad 1b$$

$$x \neq -2 \qquad -(x^2-9) > 0$$

$$x=0 \quad x=-2 \qquad -(x-3)(x+3) > 0$$

$+ \quad - \quad +$ 1b $\qquad - \quad + \quad -$ 1b

$-2 \quad 0 \qquad\qquad -3 \quad 3$

$-3 \quad -2 \quad 0 \quad 3$

$D_f = (-3,-2) \cup \langle 0,3)$ 1b

2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x} = [\infty \cdot 0] = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} \overset{LH}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{LH}{=}$ 1b 1b

$\displaystyle = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = \underline{\underline{0}}$ 1b 1b

3) $f(x) = e^{x^2+x}$ $\qquad D_f = R$ 1b

$f' = e^{x^2+x} \cdot (2x+1)$ 1b $\qquad e^{x^2+x} \cdot (2x+1) = 0$

$2x+1 = 0$

$x = -\frac{1}{2}$

$- \quad +$

$-\frac{1}{2}$

1b kles. $(-\infty, -\frac{1}{2})$, rast. $(-\frac{1}{2}, \infty)$, lok. min. $[-\frac{1}{2}; e^{-\frac{1}{4}}]$ 1b

4) $f(x) = \dfrac{3x^2+x}{1+x}$ $\qquad D_f = R \setminus \{-1\}$

$\displaystyle\lim_{x\to -1^+} \frac{3x^2+x}{1+x} = \left[\frac{2}{0^+}\right] = +\infty$ 1b $\Rightarrow$ as. bez sm. $\underline{\underline{x=-1}}$ 1b

$\displaystyle k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2+x}{(1+x)x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2+x}{\cancel{x}+x^2} = 3$ 1b

$\displaystyle q = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2+x}{1+x} - 3x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2+x-3x-3x^2}{1+x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2x}{1+x} = -2$ 1b

as. so sm. $\underline{\underline{y = 3x-2}}$

B1/

1) $f(x)=\sqrt{\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{x+2}}$

$$f' = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{x+2}}}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{2x-1}{x+2}\right)^2}\cdot\frac{2(x+2)-(2x-1)}{(x+2)^2} \quad 2b$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{x+2}}}\cdot\frac{1}{\frac{(x+2)^2+(2x-1)^2}{(x+2)^2}}\cdot\frac{2x+4-2x+1}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{x+2}}}\cdot\frac{5}{\underbrace{(x+2)^2+(2x-1)^2}_{x^2+4x+4+4x^2-4x+1=5x^2+5}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{x+2}}}\cdot\frac{5}{5x^2+5} = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{x+2}}\cdot(x^2+1)} \quad 2b$$

2) $\lim_{x\to\infty}\frac{x\ln x}{x^2+x+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{LH}{=}$ 1b $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x + x\cdot\frac{1}{x}}{2x+1}$ 1b $= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x+1}{2x+1}$

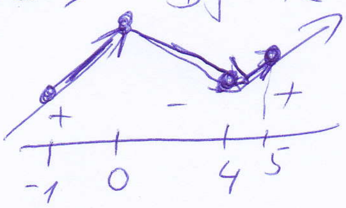
$= \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{LH}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2}$ 1b $= \underline{0}$ 1b

3) $y = x^3-6x^2 \quad \langle -1, 5\rangle \qquad Df = \mathbb{R}$ 1b

$y' = 3x^2-12x$ 1b

$3x(x-4)=0$

$x=0 \quad x=4$



$[-1,-7]$
$[5,-25]$ } 1b
$[0,0]$ abs. max
$[4,-32]$ abs. min } 1b

4) $y = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+2$

$f^{-1}:\ x = \cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)+2$

$x-2 = \cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)$

$\underline{\underline{\arccos(x-2)-\frac{\pi}{2} = y}}$

1b

$Df = \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle = Hf^{-1}$ 1b

$Hf = \langle 1, 3\rangle = Df^{-1}$ 1b

$0 \le x+\frac{\pi}{2} \le \pi$ 1b

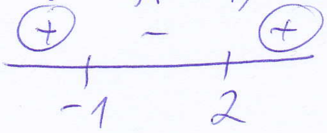
$-1 \le x-2 \le 1$

B2

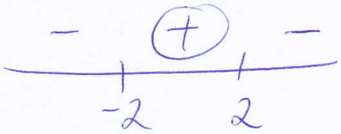
1) Df $y = \dfrac{\ln(x^2 - x - 2)}{\sqrt{4 - x^2}}$

$x^2 - x - 2 > 0$ $4 - x^2 > 0$ 1b

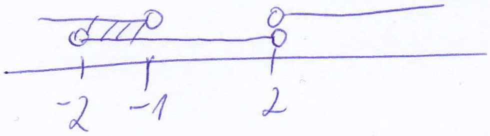
$(x-2)(x+1) > 0$ $(2-x)(2+x) > 0$



1b



1b



$Df = (-2, -1)$ 1b

2) $\lim\limits_{x\to 0+} x \ln x = [0 \cdot -\infty] = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\ln x}{x^{-1}}$ 1b $\overset{LH}{=} \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}} =$ 1b

$= \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{-x^2}{1}$ 1b $= \lim\limits_{x\to 0+} -x = \underline{\underline{0}}$ 1b

3) $f = e^{x^2}$ $Df = R$ 1b

$f' = e^{x^2} \cdot 2x$ 1b

$f'' = e^{x^2} \cdot 2x \cdot 2x + e^{x^2} \cdot 2 = e^{x^2}(4x^2 + 2)$ 1b

$e^{x^2}(4x^2+2) = 0$

$4x^2 + 2 = 0$

$x^2 \neq -\frac{2}{4}$

+

f a je konvexní na R 1b

4) $y = \dfrac{x+1}{x-2}$ $T[1, ?]$ $f(0{,}99) = ?$

$y_0 = \dfrac{1+1}{1-2} = -2$ 1b

$f' = \dfrac{x-2-(x+1)}{(x-2)^2} = \dfrac{-3}{(x-2)^2}$ $f'(1) = \dfrac{-3}{(1-2)^2} = -3$ 1b

$t:$ $y = -3(x-1) - 2$

$\underline{\underline{y = -3x + 1}}$ 1b

$f(0{,}99) = -3 \cdot (0{,}99 - 1) - 2$

$= -3 \cdot (-0{,}01) - 2$

$= 0{,}03 - 2 = \underline{\underline{-1{,}97}}$

1b

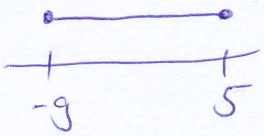
C1

1) $f(x) = \arccos\frac{x+2}{7} - \sqrt{x^2 - x - 6}$

$-1 \le \frac{x+2}{7} \le 1$

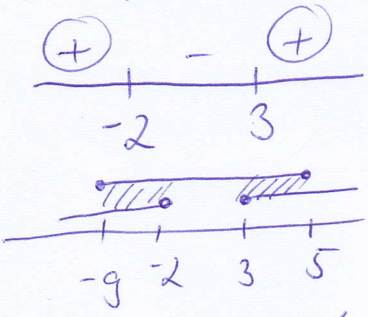
$-7 \le x+2 \le 7$

$-9 \le x \le 5$



$x^2 - x - 6 \ge 0$

$(x-3)(x+2) \ge 0$



$Df = \langle -9, -2 \rangle \cup \langle 3, 5 \rangle$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{LH}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1+x^2-1}{1+x^2}}{3x^2} =$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{1+x^2} \cdot \frac{1}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{3(1+x^2)} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$

3) $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ $Df = R$

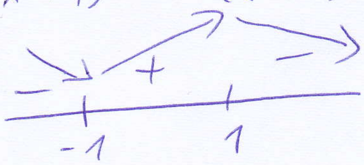
$f' = \frac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2 - 2x^2}{(x^2+1)^2}$

$\frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2} = 0$

$2 - 2x^2 = 0$

$1 = x^2$

$\pm 1 = x$



rost. $(-1, 1)$

kles. $(-\infty, -1), (1, \infty)$

lok. min. $[-1; -1]$, lok. max. $[1, 1]$

4) $f(x) = \ln(x+1) - 4$

$x + 1 > 0$

$x > -1$

$Df = (-1, \infty) = Hf^{-1}$

$Hf = R = Df^{-1}$

$x = \ln(y+1) - 4$

$x + 4 = \ln(y+1)$

f^{-1}: $\underline{\underline{e^{x+4} - 1 = y}}$

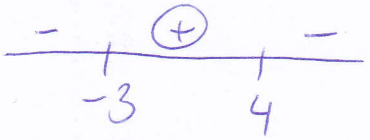
C2/

1) $f(x) = \dfrac{\ln(-x^2+x+12)}{\sqrt{2x^2-2}}$

$-x^2+x+12>0$

$-(x^2-x-12)>0$

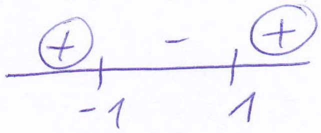
$-(x-4)(x+3)>0$

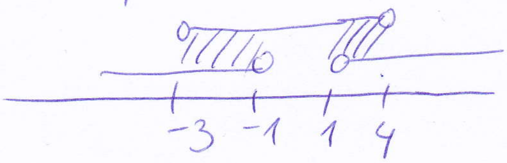


$2x^2-2>0$

$2(x^2-1)>0$

$2(x-1)(x+1)>0$





$D_f = (-3,-1) \cup (1,4)$

2) $\lim\limits_{x\to 0+} x(1-\ln x) = [0\cdot\infty] = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1-\ln x}{x^{-1}} \overset{LH}{=} \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{-\frac{1}{x}}{-x^{-2}} =$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{x^2}{1} = \lim\limits_{x\to 0+} x = \underline{\underline{0}}$

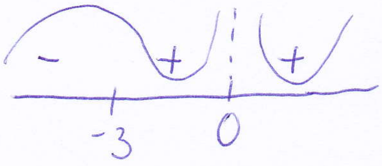
3) $f(x) = \dfrac{9}{x} + \dfrac{9}{x^2}$ $\quad D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$f(x) = 9x^{-1} + 9x^{-2}$ $\quad f' = -9x^{-2} - 18x^{-3}$ $\quad f'' = 18x^{-3} + 54x^{-4}$

$\dfrac{18}{x^3} + \dfrac{54}{x^4} = 0$

$18x + 54 = 0$

$x = -3$



konkáv. $(-\infty,-3)$

konvex. $(-3,0), (0,\infty)$

inf. bod $[-3;-2]$

4) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ $\quad T[1;?]$

$y_0 = \dfrac{1-1}{1+1} = 0$

$f' = \dfrac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} = \dfrac{2}{(x+1)^2}$ $\quad f'(1) = \dfrac{2}{2^2} = \dfrac{1}{2}$

t: $y = \frac{1}{2}(x-1)$

$\underline{\underline{y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}}$

n: $y = -\dfrac{1}{\frac{1}{2}}(x-1)$

$y = -2(x-1)$

$\underline{\underline{y = -2x+2}}$

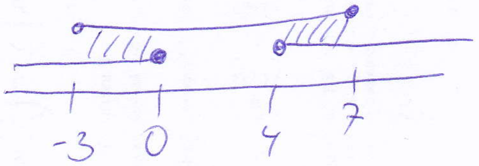
D1

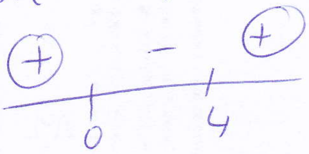
1) $f(x) = \arccos\frac{x-2}{5} - \sqrt{x^2-4x}$

$$-1 \le \frac{x-2}{5} \le 1 \qquad x^2-4x \ge 0$$

$$-5 \le x-2 \le 5 \qquad x(x-4) \ge 0$$

$$-3 \le x \le 7$$





$$D_f = \langle -3, 0 \rangle \cup \langle 4, 7 \rangle$$

2)

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}\right) = [\infty \cdot 0] = \lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}}{x^{-1}} \overset{LH}{=}$$

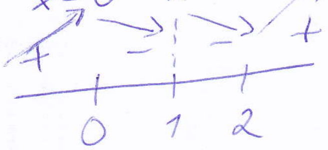
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-x^{-2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+x^2} : \frac{-1}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2}{1+x^2} = \underline{\underline{-1}}$$

3) $f(x) = \frac{x^2}{x-1} \qquad D_f = R \setminus \{1\}$

$$f' = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} \qquad \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} = 0$$

$$x(x-2) = 0$$

$$x=0 \quad x=2$$



ros. $(-\infty, 0), (2, \infty)$

kles. $(0,1), (1,2)$

lok. max $[0;0]$, lok. min $[2;4]$

4) $f(x) = \frac{4x^2+3}{x+5} \qquad D_f = R \setminus \{-5\}$

$$\lim_{x\to -5^+} \frac{4x^2+3}{x+5} = \left[\frac{103}{0^+}\right] = +\infty \qquad \text{as. bez sm. } \underline{\underline{x=5}}$$

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x^2+3}{(x+5)\cdot x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x^2+3}{x^2+5x} = 4$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x^2+3}{x+5} - 4x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x^2+3-4x^2-20x}{x+5} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-20x+3}{x+5} = -20$$

as. se směr. $\underline{\underline{y = 4x - 20}}$

D2

1) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x+4}{3-x}} + \ln(-x^2+2x)$

$\dfrac{2x+4}{3-x} \geq 0$ $\quad 3-x \neq 0$ $\quad -x^2+2x > 0$

$x \neq 3$ $\quad x(-x+2) > 0$

$2x+4=0$ $\quad 3-x=0$ $\quad x=0$ $\quad x=2$

$x=-2$ $\quad x=3$

$-$ $\quad -2$ $\quad (+)$ $\quad 3$ $\quad -$

$-$ $\quad 0$ $\quad (+)$ $\quad 2$ $\quad -$

$-2 \quad 0 \quad 2 \quad 3$

$D_f = (0, 2)$

2) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\cos 2x - 1}{\operatorname{tg} x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \overset{LH}{=} \lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{-\sin 2x \cdot 2}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \left[\dfrac{0}{+1}\right] = 0$

3) $f(x) = \dfrac{3}{x+2}$ $\quad D_f = R \setminus \{-2\}$

$f' = \dfrac{0 - 3 \cdot 1}{(x+2)^2} = \dfrac{-3}{(x+2)^2}$ $\quad f'' = \dfrac{3 \cdot 2(x+2)}{(x+2)^4} = \dfrac{6}{(x+2)^3}$ $\quad \dfrac{6}{(x+2)^3} = 0$

$6 \neq 0$

$(-)$ $\quad -2$ $\quad (+)$

konkávní $(-\infty, -2)$

konvexní $(-2, \infty)$ $\quad$ není inf. bod

4) $f(x) = 2x + xe^{2x}$ $\quad T[0, ?]$

$y_0 = 2 \cdot 0 + 0 = 0$

$f' = 2 + e^{2x} + xe^{2x} \cdot 2$ $\quad f'(0) = 2 + 1 + 0 = 3$

$t: \; y = 3(x-0) + 0$ $\quad n: \; y = -\frac{1}{3}(x-0)$

$y = 3x$ $\quad y = -\frac{1}{3}x$

1) Určete definiční obor funkce:

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + x} + \ln \frac{2x+1}{1-2x}$$

2) Vypočítejte limitu

$$\lim_{x \to 0} \frac{arctg 4x}{5x + x^2}$$

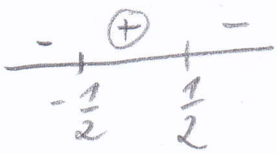
3) Určete intervaly, na kterých je funkce $f(x) = x + \frac{2x}{1-x^2}$ konvexní či konkávní, najděte inflexní body.

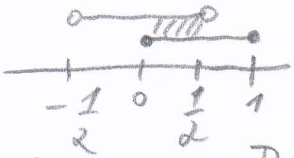
4) Najděte všechny asymptoty funkce $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x-2}$.

(1)

$$-x^2 + x \geq 0$$
$$x(-x+1) \geq 0$$

$$\frac{2x+1}{1-2x} > 0$$





$$D_f = \langle 0, \tfrac{1}{2})$$

(2)

$$\lim_{x\to 0} \frac{arctg\, 4x}{5x + x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+16x^2} \cdot 4}{5 + 2x} = \frac{4}{5}$$

(3) $D_f = R \setminus \{\pm 1\}$

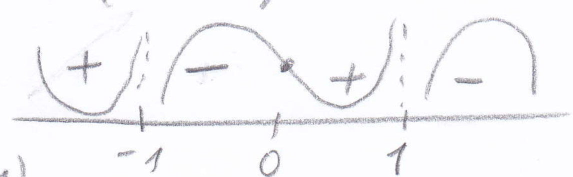
$$f' = 1 + \frac{2(1-x^2) - 2x \cdot (-2x)}{(1-x^2)^2} = 1 + \frac{2 - 2x^2 + 4x^2}{(1-x^2)^2} = 1 + \frac{2 + 2x^2}{(1-x^2)^2}$$

$$f'' = \frac{4x(1-x^2)^2 - (2+2x^2) \cdot 2(1-x^2) \cdot (-2x)}{(1-x^2)^4} = \frac{4x(1-x^2)\left[1 - x^2 + 2 + 2x^2\right]}{(1-x^2)^4} =$$

$$= \frac{4x(3+x^2)}{(1-x^2)^3}$$

$4x(3+x^2) = 0$

$x = 0 \quad x^2 \neq -3$



konvex. $(-\infty, -1), (0, 1)$

konkáv. $(-1, 0), (1, \infty)$

infl. b. $[0; 0]$

(4) $D_f = R \setminus \{2\}$

$$\lim_{x \to 2+} \frac{x^2 - 3x}{x-2} = \left[\frac{-2}{0^+}\right] = -\infty \Rightarrow \text{as. bez sm. } \underline{x = 2}$$

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 3x}{(x-2)x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 2x} = 1$$

$$q = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 3x}{x-2} - x = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 3x - x^2 + 2x}{x-2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-x}{x-2} = -1$$

$$\underline{y = x - 1}$$

1) Určete definiční obor funkce:

$$f(x)=\frac{\ln\left(3x-x^2\right)}{\sqrt{x^2-7x+10}}$$

2) Vypočítejte limitu

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$$

3) Určete intervaly, na kterých je funkce $f(x)=\frac{x^2+3}{1-x}$ rostoucí či klesající, najděte lokální extrémy.

4) Určete inverzní funkci k funkci $f(x)=\frac{2x-1}{4-3x}$. Určete definiční obor a obor hodnot obou funkcí.

① $3x-x^2>0$
$x(3-x)>0$
$-\quad \oplus \quad -$
$0 \quad 3$

$x^2-7x+10>0$
$(x-5)(x-2)$
$\oplus \quad - \quad \oplus$
$2 \quad 5$

$0 \quad 2 \quad 3 \quad 5$

$Df=(0,2)$

② $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{LH}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-(\cos x - x\sin x)}{3\sin^2 x\cdot\cos x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{3\sin^2 x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{3\sin x\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{LH}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1}{3\cos x\cos x-3\sin x\sin x}$$
$$=\underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

③ $Df=R\setminus\{1\}$

$$f'=\frac{2x(1-x)-(x^2+3)\cdot(-1)}{(1-x)^2}=\frac{2x-2x^2+x^2+3}{(1-x)^2}=$$
$$=\frac{-x^2+2x+3}{(1-x)^2}$$

$-x^2+2x+3=0$
$x^2-2x-3=0$
$(x-3)(x+1)$

$- \quad + \quad + \quad -$
$-1 \quad 1 \quad 3$

rost. $(-1,1)$, $(1,3)$, kles. $(-\infty,-1)$, $(3,\infty)$, lok. max $[3,-6]$, lok. min. $[-1,2]$

④ $x=\frac{2y-1}{4-3y}$
$4x-3xy=2y-1$
$-3xy-2y=-1-4x$
$3xy+2y=1+4x$
$y(3x+2)=1+4x$
$f^{-1}:\quad \underline{\underline{y=\frac{1+4x}{3x+2}}}$

$Df=R\setminus\{\frac{4}{3}\}=Hf^{-1}$
$Df^{-1}=R\setminus\{-\frac{2}{3}\}=Hf$

Matematika I skupina H01 ....

1) Určete definiční obor funkce:

$$f(x) = \cos x - \sqrt{-x^2 + x + 12} + \ln\frac{5-x}{x-1}$$

2) Vypočítejte limitu

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x}{arctg 5x}$$

3) Určete intervaly, na kterých je funkce $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ rostoucí či klesající, najděte lokální extrémy.

4) Najděte všechny asymptoty funkce $f(x) = \dfrac{2x^2+3x}{x+2}$.

1

$-x^2+x+12 \geq 0$

$-(x^2-x-12) \geq 0$

$-(x-4)(x+3)$

$- \quad + \quad -$; $-3 \quad 4$

$\frac{5-x}{x-1} > 0$

$- \quad + \quad -$; $1 \quad 5$

$-3 \quad 1 \quad 4 \quad 5$

$Df = (1, 4\rangle$

2

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x}{arctg 5x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{LH}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}\cdot 3}{\frac{1}{1+25x^2}\cdot 5} = \underline{\underline{\frac{3}{5}}}$$

3 $Df = R\setminus\{-1, 1\}$

$$f' = \frac{2x(x^2-1)-(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x[x^2-1-x^2-1]}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

$\frac{-4x}{(x^2-1)^2} = 0$

$x = 0$

$+ \quad + \quad - \quad -$; $-1 \quad 0 \quad 1$

rost. $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$

kles. $(0, 1)$, $(1, \infty)$

lok. max. $[0, -1]$

4 $Df = R\setminus\{-2\}$

$$\lim_{x\to -2^+}\frac{2x^2+3x}{x+2} = \left[\frac{2}{0^+}\right] = +\infty \qquad \underline{\underline{x = -2}}$$

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2+3x}{(x+2)x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2+3x}{x^2+2x} = 2$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2+3x}{x+2} - 2x = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2+3x-2x^2-4x}{x+2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x}{x+2} = -1$$

$$\underline{\underline{y = 2x - 1}}$$

1) Určete definiční obor funkce:

$$f(x)=\sqrt{\frac{x+4}{2-x}}+\arccos\frac{x+2}{3}$$

2) Vypočítejte limitu

$$\lim_{x\to 0+} x^3 \ln x$$

3) Určete intervaly, na kterých je funkce $f(x)=x^2 e^{\frac{1}{x}}$ konvexní či konkávní, najděte inflexní body.

4) Určete rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f(x)=\frac{1+x^3}{x-1}$ v bodě T = [2; ?].

① $\frac{x+4}{2-x}\geq 0$ $\quad 2-x\neq 0$ $\quad x\neq 2$

$-1\leq \frac{x+2}{3}\leq 1$

$-3\leq x+2\leq 3$

$-5\leq x\leq 1$

$-\quad +\quad -$

$-4 \quad 2$

$-5\quad -4\quad 1\quad 2$

$D_f=\langle -4,1\rangle$

② $\lim\limits_{x\to 0+} x^3\cdot \ln x=[0\cdot(-\infty)]=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln x}{x^{-3}}\overset{LH}{=}\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{-3x^{-4}}=$

$\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-3}{x^4}}=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{x^4}{-3x}=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{x^3}{-3}=\underline{\underline{0}}$

③ $D_f=R\setminus\{0\}$

$f'=2x\cdot e^{\frac{1}{x}}+x^2\cdot e^{\frac{1}{x}}\cdot(-x^{-2})=2xe^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}}(2x-1)$

$f''=e^{\frac{1}{x}}(-x^{-2})(2x-1)+e^{\frac{1}{x}}\cdot 2=e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{2x-1}{-x^2}+2\right)$

$\frac{2x-1}{-x^2}+2=0$

$2x-1-2x^2=0$

$-2x^2+2x-1=0$

$D=4-8=-4\to$ nemá kořeny

$+\quad +$

0

konvexní $(-\infty,0),(0,\infty)$

④ $y_0=\frac{1+8}{2-1}=9$

$f'=\frac{3x^2(x-1)-(1+x^3)}{(x-1)^2}=\frac{3x^3-3x^2-1-x^3}{(x-1)^2}=\frac{2x^3-3x^2-1}{(x-1)^2}$

$f'(2)=\frac{16-12-1}{(2-1)^2}=3$

t: $y=3(x-2)+9$

$\underline{\underline{y=3x+3}}$

n: $y=-\frac{1}{3}(x-2)+9$

$\underline{\underline{y=-\frac{1}{3}x+\frac{29}{3}}}$