2. písemka A ....

1) Určete definiční obor funkce $f(x)=\sqrt{\frac{2x+1}{x-3}}+\ln(x+2)$

2) Vypočítejte limitu:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg\ x-x}{x-\sin x}=$$

3) Určete rovnici tečny a normály k funkci $f(x) = arctg\ 5x$, v bodě $x_0 = 0$.
Dále pomocí diferenciálu určete hodnotu f(0,002).

4) Určete intervaly, na kterých je funkce f(x) rostoucí nebo klesající, a určete body, ve kterých nabývá svého lokálního maxima či minima.

$$f(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$$

2. písemka B ....

1) Určete definiční obor funkce $f(x)=\dfrac{\log(x+4)}{\sqrt{x^2+x-6}}$

2) Vypočítejte limitu:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sqrt{x+1}-1}=$$

3) Určete inverzní funkci k funkci *f(x) = ln (x-1) + 3*.
   Určete obor hodnot a definiční obor obou funkcí.

4) Určete intervaly, na kterých je funkce f(x) konvexní či konkávní, a určete inflexní body.

$$f(x)=x\cdot e^{-x}$$

2. písemka C ....

1) Určete definiční obor funkce $f(x) = \sqrt{2x+3} + \ln(x^2 - 3x - 4)$

2) Vypočítejte limitu:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x \cdot \sin x} =$$

3) Určete rovnici tečny a normály k funkci $f(x) = \dfrac{3x-4}{2x-3}$, v bodě $x_0 = 2$.

   A pomocí diferenciálu určete hodnotu f(1,99).

4) Určete intervaly, na kterých je funkce f(x) rostoucí nebo klesající, a určete body, ve kterých nabývá svého lokálního maxima či minima.

$$f(x) = \left(x^2 + x + 1\right) \cdot e^x$$

1) Určete definiční obor funkce:

$$f(x) = \sin x + \ln \frac{x^2 - 2x - 3}{2 - x}$$

2) Vypočítejte limitu

$$\lim_{x \to \infty} x^2 e^{-x^2}$$

3) Určete derivaci funkce $f'(1)$:

$$f(x) = arctg\,\frac{x-1}{2x+3}$$

4) Najděte absolutní extrémy funkce $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ na intervalu $\langle -2;2 \rangle$.

1) Určete definiční obor funkce:

$$f(x) = tgx + \ln\left(-x^2 + 7x - 10\right)$$

2) Vypočítejte limitu

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^x$$

3) Určete absolutní extrémy funkce $f(x) = \dfrac{\ln^2 x}{x}$ na intervalu $\left\langle 0;2\right\rangle$.

4) Určete první derivaci funkce:

$$f(x) = e^{\arcsin\sqrt{x}}$$

1) Určete definiční obor funkce:

$$f(x) = \arcsin x + \frac{\ln x}{\sqrt{2x-1}}$$

2) Vypočítejte limitu

$$\lim_{x \to 9} \frac{tg(9-x)}{\sqrt{x}-3}$$

3) Určete inverzní funkci k funkci $f(x): y = \sin(x - \frac{\pi}{2}) + 1$. Určete definiční obor a obor hodnot obou funkcí.

4) Určete derivaci $f''(1)$ funkce:

$$f(x) = e^{x^3-2x+1}$$

1) Určete definiční obor funkce:

$$f(x)=\sqrt{5x-x^2}+\ln\frac{-x-3}{2-x}$$

2) Vypočítejte limitu

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x}{tg\,3x}$$

3) Najděte všechny asymptoty funkce

$$f(x)=\frac{x^2-1}{2x+3}$$

4) Určete intervaly monotonie a najděte lokální extrémy funkce $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-4}$.

2. písemka A ....

1) Určete definiční obor funkce $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x+1}{x-3}}+\ln(x+2)$

2) Vypočítejte limitu:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg\,x-x}{x-\sin x}=$$

3) Určete rovnici tečny a normály k funkci *f(x) = arctg 5x*, v bodě $x_0 = 0$.
Dále pomocí diferenciálu určete hodnotu f(0,002).

4) Určete intervaly, na kterých je funkce f(x) rostoucí nebo klesající, a určete body, ve kterých nabývá svého lokálního maxima či minima.

$$f(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$$

① $\dfrac{2x+1}{x-3}\geq 0$ $\qquad x+2>0$

$x>-2$

$2x+1=0 \qquad x-3=0$

$x=-\frac{1}{2} \qquad x=3$

$+ \quad - \quad +$

$-\frac{1}{2} \qquad 3$

$-2 \quad -\frac{1}{2} \quad 3$

$D_f=(-2;-\frac{1}{2}\rangle\cup\langle 3,\infty)$

② $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,x-x}{x-\sin x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=$

$\overset{LH}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{1-\cos x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos^2 x)}{\cos^2 x}\cdot\dfrac{1}{1-\cos x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cancel{\cos x})\cdot(1+\cos x)}{\cos^2 x\cdot(1-\cancel{\cos x})}=\dfrac{1+1}{1}=2$

③ $x_0=0$

$y_0=arctg\,5\cdot x_0=arctg\,0=0$

$f'=\dfrac{1}{1+(5x)^2}\cdot 5=\dfrac{5}{1+25x^2}$

$f'(x_0)=\dfrac{5}{1+25\cdot 0^2}=5$

$t:\ y=5\cdot(x-0)+0$

$y=5x$

$n:\ y=-\frac{1}{5}(x-0)+0$

$y=-\frac{1}{5}x$

④ $f'=\dfrac{2(x-1)\cdot(x^2+1)-(x-1)^2\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{2(x-1)[x^2+1-x^2+x]}{(x^2+1)^2}=\dfrac{2(x-1)\cdot(x+1)}{(x^2+1)^2}$

$2(x-1)\cdot(x+1)=0$

$x=1 \quad x=-1$

$+ \quad - \quad +$

$-1 \quad 1$

$D_f=R$

$x^2+1\neq 0$

$x^2\neq -1$

nelze

rostoucí $(-\infty;-1\rangle$, $\langle 1,\infty)$

klesající $\langle -1,1\rangle$

lok. min. $[1;0]$

lok. max. $[-1;2]$

2. písemka B ....

1) Určete definiční obor funkce $f(x) = \dfrac{\log(x+4)}{\sqrt{x^2+x-6}}$

2) Vypočítejte limitu:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{x+1}-1} =$$

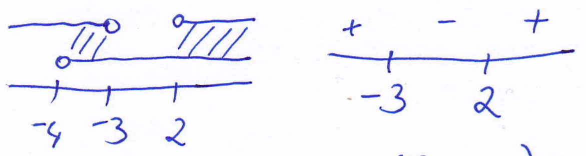
3) Určete inverzní funkci k funkci *f(x) = ln (x-1) + 3*.
Určete obor hodnot a definiční obor obou funkcí.

4) Určete intervaly, na kterých je funkce f(x) konvexní či konkávní, a určete inflexní body.

$$f(x) = x \cdot e^{-x}$$

1) $x+4>0$ $\quad x^2+x-6>0$ (kvůli zlomku tam není $\geq$)

$x>-4$ $\quad (x-2)(x+3)>0$



$Df = (-4,-3) \cup (2, \infty)$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{x+1}-1} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \overset{LH}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 2x \cdot 2}{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}} = \dfrac{1\cdot 2}{\frac{1}{2\cdot 1}} = 4$

3) $f^{-1}: \; x = \ln(y-1)+3$

$x-3 = \ln(y-1)$

$e^{x-3} = y-1$

$e^{x-3}+1 = y$

$x-1>0$

$x>1 \Rightarrow Df = (1;\infty) = Hf^{-1}$

$Df^{-1} = R = Hf$

4) $f' = e^{-x} + x\cdot e^{-x}\cdot(-1) =$

$= e^{-x}(1-x)$

$f'' = e^{-x}\cdot(-1)\cdot(1-x) + e^{-x}\cdot(-1) =$

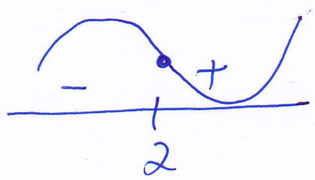
$= e^{-x}\cdot(-1)\cdot[1-x+1] =$

$= e^{-x}\cdot(-1)\cdot(2-x)$

$e^{-x}\cdot(-1)\cdot(2-x) = 0$

$2-x = 0$

$x = 2$



$Df = R$

konkávní $(-\infty; 2\rangle$

konvexní $\langle 2, \infty)$

inflexní bod $[2; 2e^{-2}]$

2. písemka C ....

1) Určete definiční obor funkce $f(x)=\sqrt{2x+3}+\ln(x^2-3x-4)$

2) Vypočítejte limitu:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\cdot\sin x}=$$

3) Určete rovnici tečny a normály k funkci $f(x)=\frac{3x-4}{2x-3}$, v bodě $x_0 = 2$.

A pomocí diferenciálu určete hodnotu f(1,99).

4) Určete intervaly, na kterých je funkce f(x) rostoucí nebo klesající, a určete body, ve kterých nabývá svého lokálního maxima či minima.

$$f(x)=\left(x^2+x+1\right)\cdot e^x$$

① $2x+3\geq 0$ $\quad x\geq -\frac{3}{2}$

$x^2-3x-4>0$

$(x-4)(x+1)>0$

$+ \quad -1 \quad - \quad 4 \quad +$

$-\frac{3}{2} \quad -1 \quad 4$

$\underline{\underline{Df=\langle -\frac{3}{2}, -1)\cup(4,\infty)}}$

② $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{LH}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin x + x\cos x}=$

$=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{LH}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\cos x+\cos x+x(-\sin x)}=\frac{0}{2}=\underline{\underline{0}}$

③ $x_0=2 \quad y_0=\frac{3\cdot 2-4}{2\cdot 2-3}=\frac{2}{1}=2 \quad f'=\frac{3(2x-3)-(3x-4)\cdot 2}{(2x-3)^2}=$

$=\frac{6x-9-6x+8}{(2x-3)^2}=\frac{-1}{(2x-3)^2} \quad f'(2)=\frac{-1}{(2\cdot 2-3)^2}=-1$

$t:\ y=-1(x-2)+2$

$\underline{\underline{y=-x+4}}$

$n:\ y=-\frac{1}{-1}(x-2)+2$

$\underline{\underline{y=x}}$

dif.: $f(1{,}99)\to$ dosadíme do tečny $\quad f(1{,}99)=-1{,}99+4=2{,}01$

④ $f=(x^2+x+1)\cdot e^x \quad Df=R$

$f'=(2x+1)\cdot e^x+(x^2+x+1)\cdot e^x=e^x(2x+1+x^2+x+1)=e^x(x^2+3x+2)$

$e^x(x^2+3x+2)=0$

$x^2+3x+2=0$

$(x+2)(x+1)=0$

$+ \quad -2 \quad - \quad -1 \quad +$

rostoucí $(-\infty;-2\rangle, \langle -1,\infty)$

klesající $\langle -2,-1\rangle$

lok. min. $[-1; e^{-1}]$

lok. max. $[-2; 3e^{-2}]$

1) Určete definiční obor funkce:

$$f(x)=\sin x+\ln\frac{x^2-2x-3}{2-x}$$

2) Vypočítejte limitu

$$\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x^2}$$

3) Určete derivaci funkce $f'(1)$:

$$f(x)=arctg\frac{x-1}{2x+3}$$

4) Najděte absolutní extrémy funkce $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$ .na intervalu $\langle -2;2\rangle$.

① $\sin x \Rightarrow x\in\mathbb{R}$

$$\frac{x^2-2x-3}{2-x}>0$$

$x^2-2x-3=0 \qquad 2-x=0$

$(x-3)(x+1)=0 \qquad 2=x$

$\oplus \quad - \quad \oplus \quad -$

$-1 \quad 2 \quad 3$

$$D_f=(-\infty;-1)\cup(2;3)$$

② $$\lim_{x\to\infty} x^2\cdot e^{-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^{x^2}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$\overset{LH}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^{x^2}\cdot 2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{x^2}}=\left[\frac{1}{\infty}\right]=\underline{0}$$

③ $$f'=\frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{2x+3}\right)^2}\cdot\frac{1\cdot(2x+3)-(x-1)\cdot 2}{(2x+3)^2}=\frac{1}{1+\frac{(x-1)^2}{(2x+3)^2}}\cdot\frac{2x+3-2x+2}{(2x+3)^2}=$$

$$=\frac{5}{(2x+3)^2+(x-1)^2}$$

$$f'(1)=\frac{5}{(2+3)^2+(1-1)^2}=\underline{\frac{1}{5}}$$

④ $$f'=\frac{1\cdot(1+x^2)-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

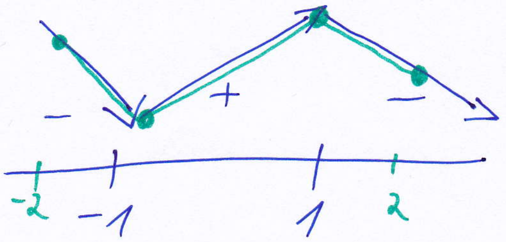
$$\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}=0$$

$1-x^2=0$

$1=x^2$

$x=\pm 1$

$D_f=\mathbb{R}$



lok. min. $[-1,-\frac{1}{2}]$

lok. max. $[1;\frac{1}{2}]$

nejmenší

největší

$[-1;-\frac{1}{2}]\leftarrow$ ab. MIN

$[1,\frac{1}{2}]\leftarrow$ ab. MAX

$[-2;-\frac{2}{5}]$

$[2;\frac{2}{5}]$

1) Určete definiční obor funkce:

$$f(x) = tgx + \ln\left(-x^2 + 7x - 10\right)$$

2) Vypočítejte limitu

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^x$$

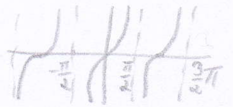
3) Určete absolutní extrémy funkce $f(x) = \dfrac{\ln^2 x}{x}$ na intervalu $(0;2\rangle$.

4) Určete derivaci funkce

:

$$f(x) = e^{\arcsin\sqrt{x}}$$

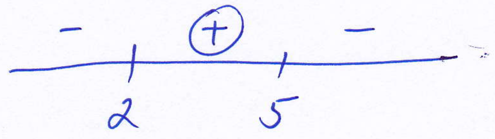
① $tg\, x \Rightarrow x \in R \setminus \{(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}\}$



$-x^2+7x-10>0$

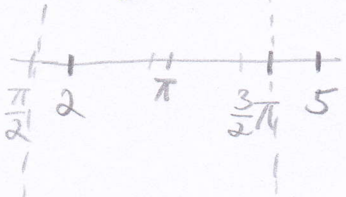
$-(x^2-7x+10)>0$

$-(x-2)(x-5)>0$



$Df = (2,5) \setminus \{(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}\}$

neboli $= (2,5) \setminus \{\frac{3}{2}\pi\}$



$= e^3 \cdot e^1$

② $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x(1+\frac{3}{x})}{x(1-\frac{1}{x})}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1+\frac{3}{x})^x}{(1-\frac{1}{x})^x} = \dfrac{e^3}{e^{-1}} = \underline{\underline{e^4}}$

VZOREC $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = e^k$

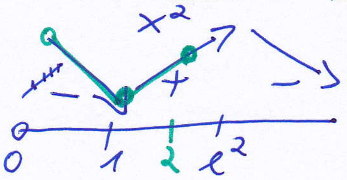
③ $f' = \dfrac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}\cdot x - \ln^2 x\cdot 1}{x^2} = \dfrac{2\ln x - \ln^2 x}{x^2} = \dfrac{\ln x(2-\ln x)}{x^2}$

$\ln x(2-\ln x) = 0$

$\ln x = 0 \qquad 2-\ln x = 0$

$x = 1 \qquad 2 = \ln x$

$e^2 = x$



$Df = (0,\infty)$

$[1;0]$ abs. MIN

$[2;\frac{\ln^2 2}{2}]$ abs. MAX

④ $f' = e^{\arcsin\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Matematika I skupina A31 ....

1) Určete definiční obor funkce:

$$f(x) = \arcsin x + \frac{\ln x}{\sqrt{2x-1}}$$

2) Vypočítejte limitu

$$\lim_{x\to 9} \frac{tg(9-x)}{\sqrt{x}-3}$$

3) Určete inverzní funkci k funkci $f(x): y = \sin(x - \frac{\pi}{2}) + 1$. Určete definiční obor a obor hodnot obou funkcí.

4) Určete derivaci $f''(1)$ funkce

:

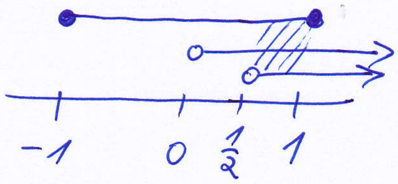
$$f(x) = e^{x^3-2x+1}$$

① $\arcsin x \Rightarrow -1 \le x \le 1$

$x > 0$

$2x - 1 > 0$

$x > \frac{1}{2}$



$D_f = (\frac{1}{2}, 1\rangle$

② $$\lim_{x\to 9} \frac{tg(9-x)}{\sqrt{x}-3} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{LH}{=} \lim_{x\to 9} \frac{\frac{1}{\cos^2(9-x)}\cdot(-1)}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{1\cdot(-1)}{\frac{1}{2\cdot 3}} = -6$$

③ $y = \sin(x - \frac{\pi}{2}) + 1$

f^{-1}: $x = \sin(y - \frac{\pi}{2}) + 1$

$x - 1 = \sin(y - \frac{\pi}{2})$

$\arcsin(x-1) = y - \frac{\pi}{2}$

$\arcsin(x-1) + \frac{\pi}{2} = y$

$\longrightarrow$ D_f, aby k sin ex. inverzní fce, musí být hodnoty z int. $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$

$-\frac{\pi}{2} \le x - \frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} \quad / + \frac{\pi}{2}$

$0 \le x \le \pi \Rightarrow D_f = \langle 0, \pi\rangle = H_{f^{-1}}$

$\longrightarrow -1 \le x - 1 \le 1 \quad / + 1$

$0 \le x \le 2 \Rightarrow D_{f^{-1}} = \langle 0, 2\rangle = H_f$

④ $f' = e^{x^3-2x+1} \cdot (3x^2 - 2)$

$f'' = e^{x^3-2x+1}(3x^2-2)^2 + e^{x^3-2x+1}(6x) = e^{x^3-2x+1}((3x^2-2)^2 + 6x)$

$f''(1) = e^{1-2+1} \cdot ((3-2)^2 + 6) = e^0 \cdot (1+6) = 7$

Matematika I skupina A41 ....

1) Určete definiční obor funkce:

$$f(x)=\sqrt{5x-x^2}+\ln\frac{-x-3}{2-x}$$

2) Vypočítejte limitu

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x}{tg\,3x}$$

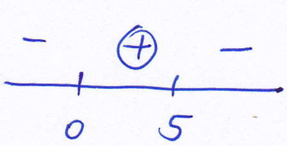
3) Najděte všechny asymptoty funkce

$$f(x)=\frac{x^2-1}{2x+3}$$

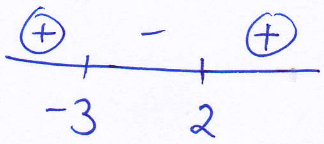
4) Určete intervaly monotonie a najděte lokální extrémy funkce $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-4}$.

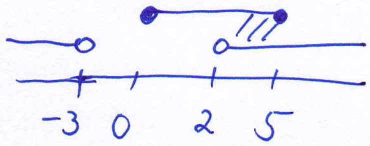
① $5x-x^2\geq 0$

$x(5-x)\geq 0$



$\dfrac{-x-3}{2-x}>0$





$D_f=(2,5\rangle$

② $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x}{tg\,3x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]\overset{LH}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x+x\cdot(-\sin x)}{\frac{1}{\cos^2 3x}\cdot 3}=\dfrac{1+0}{1\cdot 3}=\dfrac{1}{3}$

③ $D_f=R\setminus\{-\frac{3}{2}\}$

$\lim\limits_{x\to -\frac{3}{2}+}\dfrac{x^2-1}{2x+3}=\left[\dfrac{\frac{5}{4}}{0+}\right]=+\infty \Rightarrow$ as. bez směrnice $x=-\dfrac{3}{2}$

$k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\frac{x^2-1}{2x+3}}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2+3x}=\dfrac{1}{2}$

$q=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-1}{2x+3}-\dfrac{1}{2}x=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^2-2-2x^2-3x}{2(2x+3)}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-3x-2}{4x+6}=-\dfrac{3}{4}$

asympt. se směrn. v $\pm\infty$: $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{4}$

④ $f'=\dfrac{2(x^2-4)-(2x)\cdot 2x}{(x^2-4)^2}=\dfrac{2x^2-8-4x^2}{(x^2-4)^2}=\dfrac{-8-2x^2}{(x^2-4)^2}$

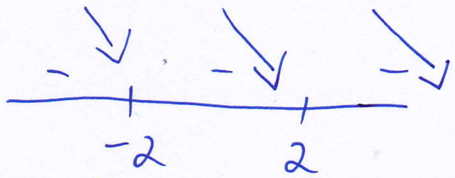
$-8-2x^2=0$

$-8=2x^2$

$-4\neq x^2$

nelze

$D_f=R\setminus\{\pm 2\}$



fce nemá lok. extrém

je klesající $(-\infty,-2),(-2,2),(2,+\infty)$