2. písemka – Matematika I skupina A ....

1) Určete definiční obor funkce $f(x) = \sqrt{x-2} - \ln(-x^2 + 2x + 3)$.

2) Vypočítejte limitu:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$$

3) Určete rovnici tečny k funkci $f(x) = 2\ln(x-3)$ v bodě T[4;?]. Dále pomocí diferenciálu určete přibližnou hodnotu funkce v bodě 3,99.

4) Určete intervaly, na kterých je funkce $f(x) = e^{x^2+8x+12}$ rostoucí či klesající a určete body, ve kterých nabývá svého lokálního maxima a minima.

1) $x - 2 \geq 0$

$x \geq 2$

2 (1b)

$-x^2 + 2x + 3 > 0$

$-(x^2 - 2x - 3) > 0$

$-(x-3)(x+1) > 0$

$-$ $+$ $-$

-1 3 (1b)

Průnik

-1 2 3 (2b)

$D_f = \langle 2; 3)$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \left[\dfrac{1+1-2}{1-1} = \dfrac{0}{0}\right]$ (1b) $\overset{LH}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x + e^{-x}(-1)}{-(-\sin x)}$ (1b) $=$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \left[\dfrac{1-1}{0}\right] \overset{LH}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}(-1)}{\cos x}$ (1b) $= \dfrac{1 - 1\cdot(-1)}{1} = 2$ (1b)

3) $x_0 = 4$ $\quad y_0 = 2 \cdot \ln(4-3) = 2\ln 1 = 2 \cdot 0 = 0$ (1b)

$f' = 2 \cdot \dfrac{1}{x-3}$ $\quad f'(4) = 2 \cdot \dfrac{1}{4-3} = 2$ (1b)

$t: \; y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0$

$y = 2(x-4) + 0$

$y = 2x - 8$ (1b)

$f(3{,}99)$: dosadím do tečny

$y = 2 \cdot 3{,}99 - 8 =$

$= 7{,}98 - 8 = -0{,}02$

(1b)

4) $f = e^{x^2+8x+12}$ $\quad D_f = R$

$f' = e^{x^2+8x+12} \cdot (2x+8)$ (1b)

$e^{x^2+8x+12} \cdot (2x+8) = 0$

vždy kladné (není formule)

$2x + 8 = 0$

$2x = -8$

$x = -4$

(1b)

$-$ $+$

-4

kles. $(-\infty; -4\rangle$

rost. $\langle -4; +\infty)$ (1b)

lokální min. $[-4; e^{-4}]$ (1b)

lok. max. není

2. písemka – Matematika I skupina B ....

1) Určete definiční obor funkce $f(x) = \ln\frac{x+1}{x-2} - \sqrt{x+2}$.

2) Vypočítejte limitu:

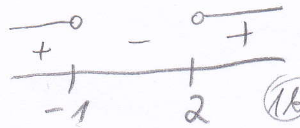
$$\lim_{x\to\infty} x \sin\frac{1}{x}$$

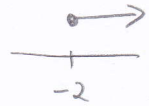
3) Určete inverzní funkci k funkci $f(x) = e^{x+2} - 1$. Dále určete definiční obor a obor hodnot obou funkcí.

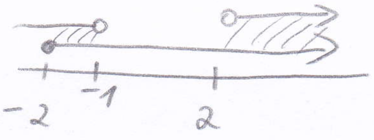
4) Určete intervaly, na kterých je funkce $f(x) = x^4 + 2x^3 - 12x^2$ konvexní či konkávní a určete inflexní body.

1) $\frac{x+1}{x-2} > 0$ $\qquad x+2 \geq 0$ $\qquad$ průnik:

$\qquad\qquad\qquad\qquad x \geq -2$


(1b)


(1b)


(2b)

$Df = \langle -2; -1) \cup (2; +\infty)$

2) $\lim_{x\to\infty} x \cdot \sin\frac{1}{x} = [\infty \cdot \sin 0 = \infty \cdot 0] = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^{-1}} \overset{LH}{=}$ (1b) (1b)

$= \lim_{x\to\infty} \frac{\cos\frac{1}{x} \cdot (-x^{-2})}{-x^{-2}}$ (1b) $= \lim_{x\to\infty} \cos\frac{1}{x} = [\cos 0] = \underline{\underline{1}}$ (1b)

3) $y = e^{x+2} - 1$ $\qquad Df = R = Hf^{-1}$ (1b)

f^{-1}: $x = e^{y+2} - 1$ $\qquad Df^{-1} = (-1; +\infty) = Hf$ (1b)

$x+1 = e^{y+2}$

$\ln(x+1) = y+2$ $\qquad x+1 > 0$

$\underline{\underline{\ln(x+1) - 2 = y}}$ (2b) $\qquad x > -1$

4) $f = x^4 + 2x^3 - 12x^2$ $\qquad 12x^2 + 12x - 24 = 0$

$f' = 4x^3 + 6x^2 - 24x$ $\qquad 12 \cdot (x^2 + x - 2) = 0$

$f'' = 12x^2 + 12x - 24$ $\qquad 12 \cdot (x+2)(x-1) = 0$ (1b)

(1b)


(1b)

$Df = R$

konvexní $(-\infty; -2\rangle, \langle 1; +\infty)$

konkávní $\langle -2; +1\rangle$ (1b)

inflexní body: $x = -2$, $x = 1$

2. písemka – Matematika I skupina C ....

1) Určete definiční obor funkce $f(x)=\dfrac{\log\left(3x-x^2\right)}{\sqrt{x^2-4}}$.

2) Vypočítejte limitu:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x-\sin x}$$

5) Určete rovnici tečny k funkci $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x-1}$ v bodě T[2;?]. Dále pomocí diferenciálu určete přibližnou hodnotu funkce v bodě 2,01.

3) Určete intervaly, na kterých je funkce $f(x)=x^2e^{-x}$ rostoucí či klesající a určete body, ve kterých nabývá svého lokálního maxima a minima.

1) $3x-x^2>0$

$x\cdot(3-x)>0$

$-\quad+\quad-$

$0 \quad 3$ (1b)

$x^2-4>0$ (není rovno, protože je to dole ve zlomku)

$(x-2)(x+2)>0$

$+\quad-\quad+$

$-2 \quad 2$ (1b)

Průnik

$-2 \quad 0 \quad 2 \quad 3$ (2b)

$(2,3)$

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{tg\,x-\sin x}{x-\sin x}=\left[\frac{0-0}{0-0}\right]\overset{LH}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-\cos x}{1-\cos x}=\left[\frac{1-1}{1-1}\right]\overset{LH}{=}$$ (1b)

POZN: $\frac{1}{\cos^2 x}=(\cos x)^{-2}$ (2b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2(\cos x)^{-3}\cdot(-\sin x)+\sin x}{-(-\sin x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(+\frac{2}{\cos^3 x}+1\right)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\cos^3 x}+1=\underline{\underline{3}}$$ (1b)

3) $x_0=2 \qquad y_0=\dfrac{2^2+4}{2-1}=8$ (1b)

$$f'=\frac{2x(x-1)-(x^2+4)\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-x^2-4}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-4}{(x-1)^2}$$

$$f'(2)=\frac{2^2-2\cdot 2-4}{(2-1)^2}=-4$$ (1b)

$t:\ y=f'(x)\cdot(x-x_0)+y_0$

$y=-4(x-2)+8$

$\underline{\underline{y=-4x+16}}$ (1b)

$f(2{,}01)$: dosadím do tečny

$y=-4\cdot 2{,}01+16=$

$=16-8{,}04=\underline{\underline{7{,}96}}$ (1b)

4) $f=x^2\cdot e^{-x} \qquad Df=R$ (1b)

$f'=2x\cdot e^{-x}+x^2e^{-x}(-1)=e^{-x}(2x-x^2)$

$e^{-x}(2x-x^2)=0$

vždy větší než 0 $\Rightarrow$ $2x-x^2=0$

$x(2-x)=0$

$x=0 \quad x=2$ (1b)

$-\quad+\quad-$

$0 \quad 2$

klesající $(-\infty;0\rangle$, $\langle 2,\infty)$ (1b)

rostoucí $\langle 0,2\rangle$

lokální max $[2;4e^{-2}]$ (1b)

lokální min $[0;0]$

5) Určete definiční obor funkce $f(x)=\ln(1-x)-\sqrt{x^2-x-6}$.

1) Vypočítejte limitu:

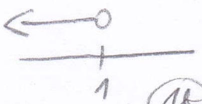
$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$$

2) Určete inverzní funkci k funkci $f(x)=\log_3(x-1)+2$. Dále určete definiční obor a obor hodnot obou funkcí.

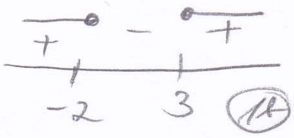
3) Určete intervaly, na kterých je funkce $f(x)=x(1-x)^2$ konvexní či konkávní a určete inflexní body.

1) $1-x>0$ $\quad x^2-x-6\geq 0$ $\quad$ Průnik

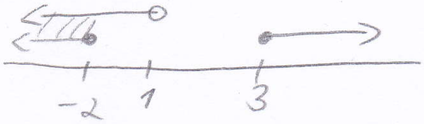
$1>x$ $\quad (x-3)(x+2)\geq 0$



(1b)



(1b)



(2b)

$Df=(-\infty;-2\rangle$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}=\left[\dfrac{0\cdot 1-0}{0}\right]\overset{LH}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x+x(-\sin x)-\cos x}{3x^2}=$ (1b)

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x\sin x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x}{3x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]\overset{LH}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\cos x}{3}=\underline{\underline{\dfrac{-1}{3}}}$ (1b) (1b) (1b)

3) $y=\log_3(x-1)+2$ $\quad\to\quad x-1>0$

$x>1$

$x=\log_3(y-1)+2$

$Df=(1;+\infty)=Hf^{-1}$ (1b)

$x-2=\log_3(y-1)$

$Df^{-1}=R=Hf$ (1b)

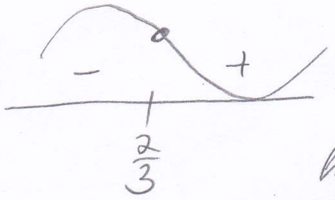
$3^{x-2}=y-1$

$\underline{3^{x-2}+1=y}$ (2b)

4) $f=x\cdot(1-x)^2=x\cdot(1-2x+x^2)=x-2x^2+x^3$ $\quad Df=R$

$f'=1-4x+3x^2$ (1b)

$f''=-4+6x$



$-4+6x=0$

$6x=4$

$x=\frac{2}{3}$ (1b)

konkávní $(-\infty;\frac{2}{3}\rangle$

konvexní $\langle\frac{2}{3};+\infty)$ (1b)

infl. bod $x=\frac{2}{3}$ (1b)