

skupina A -----

1) Vypočtěte limitu:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$$

*Teorie: Načrtněte graf libovolné funkce, která nemá limitu v bodě  $x = 0$ . Vysvětlete, proč limita neexistuje.*

2) Vypočítejte z maticové rovnice neznámou matici X:

$$AX - B = BX + B, \text{ kde } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

3) Určete maximální intervaly, na kterých je funkce  $f(x) = 3x^4 + 4x^3$  konkávní, resp. konvexní. Určete inflexní body.

4) Řešte soustavu lineárních rovnic pomocí matic:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 0 \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

5) Určete Taylorův polynom třetího stupně funkce  $f$  v bodě  $x_0 = -2$ , kde  $f(x) = -x^5 + x^4 - 2x^3 + x - 1$ .

6) Určete determinant matice

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

*Teorie: Co platí pro determinant trojúhelníkové matice? Uveďte názorný příklad.*

- 1) Určete rovnici normály k funkci  $f(x) = \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} - 1$  v bodě  $T[4, ?]$ .

*Teorie: Jaký úhel svírá tečna s normálou? Mají tečna a normála nějaké společné body?*

- 2) Nalezněte maximum funkce  $z = 6x_1 + 5x_2 + 4x_3$  za podmínek:

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 40$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 60$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- 3) Určete globální (absolutní) extrémů funkce  $f(x) = x + \frac{1}{x-1}$  na intervalu  $\langle -4; 0 \rangle$ .

- 4) Určete inverzní matici k matici A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

*Teorie: Jak lze provést zkoušku, jestli je inverzní matice vypočítaná správně?*

- 5) Určete všechny asymptoty funkce  $f(x) = \frac{3x^2-2}{x-5}$ .

- 6) Cramerovým pravidlem vypočítejte neznámou  $x_1$  ze soustavy lineárních rovnic:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$2x_1 - x_2 - x_3 = 5$$

$$-x_1 - 2x_2 + x_3 = -3$$

ŘEŠENÍ: (A)

1) pomocí L'Hospit. pravidla = 2

2)  $X = (A-B)^{-1} \cdot (2B) = \begin{pmatrix} -4 & -14 \\ -2 & -20 \end{pmatrix}$

3)  $Df = R$   
 $f'' = 36x^2 + 24x$   
 $\begin{matrix} + & - & + \\ \frac{1}{3} & 0 & \end{matrix}$  konver.  $(-\infty; -\frac{2}{3})$ ,  $(0; \infty)$   
konkavn.  $(-\frac{2}{3}; 0)$   
infl. b.  $x = -\frac{2}{3}$   
 $x = 0$

4) NMR 2 parametry  $[4k+3o, 7k+5o, k, o]$   $o, k \in R$

5)  $T_3(x) = 61 - 135(x+2) + 116(x+2)^2 - 50(x+2)^3$

6)  $\det = 3$

(B) 1)  $m: y = -8x + 34$  ( $f' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 2 \cdot (-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}})$ )

2)  $x_1 = x_3 = x_4 = 0$   $x_2 = 40$   $x_5 = 20$   $R = 200$

3)  $[-4; -\frac{21}{5}]$  gl. min.,  $[0; -1]$  gl. max.  $f' = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}$

4)  $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} & \frac{19}{2} & -\frac{15}{2} \\ -3 & -6 & 5 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

5) as. bez směrnice  $x = 5$   
as. se směrn.  $y = 3x + 15$

6)  $x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-18}{-9} = 2$