zkoušková písemka *skupina A* ------------------------------

Příklady:

1) Určete maximální intervaly, na kterých je funkce $f(x) = x^2 e^{-x}$ rostoucí, resp. klesající.

2) Určete rovnici normály k funkci $f(x) = x - \frac{4}{x^2}$ v bodě T[1,?].

3) Vypočítejte z maticové rovnice matici X:

$$XA - A = B$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

4) Určete limitu

$$\lim_{x \to 4} \frac{2\sqrt{x} - 4}{\sqrt{2x+1} - 3}$$

Teorie:

1) Napište základní větu lineárního programování.
2) Vysvětlete pojem singulární matice. Co platí pro její hodnost a determinant?

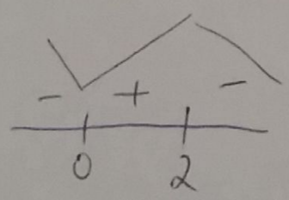
1) $D_f = \mathbb{R}$

$f' = 2xe^{-x} + x^2 \cdot e^{-x}(-1) = e^{-x}(2x - x^2)$

$e^{-x}(2x - x^2) = 0$

$x(2-x) = 0$

$x = 0 \quad x = 2$



rost $\langle 0; 2)$

kles. $(-\infty; 0\rangle, \langle 2; \infty)$

2) $x_0 = 1 \quad y_0 = 1 - \frac{4}{1^2} = -3$

$f' = 1 - 4(-2x^{-3}) = 1 + \frac{8}{x^3}$

$f'(x_0) = 1 + 8 = 9$

$n: y = -\frac{1}{9}(x-1) - 3$

4) $\lim_{x \to 4} \frac{2\sqrt{x} - 4}{\sqrt{2x+1} - 3} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{LH}{=}$

$= \lim_{x \to 4} \frac{2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{2x+1}} \cdot 2} = \lim_{x \to 4} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{2x+1}}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$

3) $XA - A = B$

$XA = A + B$

$XA \cdot A^{-1} = (A+B)A^{-1}$

$\underline{X = (A+B) \cdot A^{-1}} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} -9 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}}$

$A + B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

zkoušková písemka skupina B ------------------------------

Příklady:

1) Najděte inflexní body funkce $f(x)=x^4+2x^3-12x^2$.

2) Řešte soustavu rovnic pomocí matic:

$$2x+4y-z=0$$
$$4x-6y-3z=0$$
$$x+y-2z=0$$

3) Určete limitu

$$\lim_{x\to 0}\frac{arctg\ 2x}{\arcsin(-x)}$$

4) Nalezněte maximum funkce $z=400x_1+600x_2$ za podmínek:

$$\begin{array}{lll} 2x_1 & +x_2 & \leq 6000 \\ x_1 & +x_2 & \leq 4000 \\ & x_2 & \leq 3000 \end{array}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Teorie:

1) Vysvětlete, co je to normála, a jak určíme rovnici normály ke grafu funkce f v bodě x_0?

2) Napište Frobeniovu podmínku (větu).

1) $D_f=\mathbb{R}$

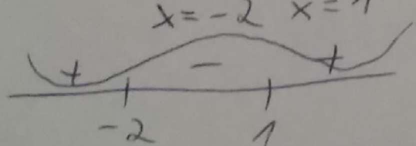
$f'=4x^3+6x^2-24x$

$f''=12x^2+12x-24$

$12(x^2+x-2)=0$

$12(x+2)(x-1)=0$

$x=-2 \quad x=1$



konvexní $(-\infty;-2\rangle, \langle 1,\infty)$

konkávní $\langle -2;1\rangle$

2) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -1 & 0 \\ 4 & -6 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -14 & -1 & 0 \end{array}\right)$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} z=0 \\ y=0 \\ x=0 \end{array} \quad [0,0,0]$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{arctg\,2x}{\arcsin(-x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+4x^2}\cdot 2}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot(-1)}=\frac{2}{-1}=\underline{\underline{-2}}$

4)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_3	2	1	1	0	0	6000
x_4	1	1	0	1	0	4000
x_5	0	$\boxed{1}$	0	0	1	3000
R	-400	-600	0	0	0	0

x_3	2	0	1	0	-1	3000	1500
x_4	$\boxed{1}$	0	0	1	-1	1000	1000
x_2	0	1	0	0	1	3000	=
R	-400	0	0	0	600	1800000	

x_3	0	0	1	-2	1	1000
x_1	1	0	0	1	-1	1000
x_2	0	1	0	0	1	3000
R	0	0	0	400	200	2200 000 ✓

$x_1 = 1000$
$x_2 = 3000$
$x_3 = 1000$ $\qquad R = 2\,200\,000$
$x_4 = 0$
$x_5 = 0$

zkoušková písemka *skupina C* -----------------------------

Příklady:

1) Určete intervaly, na kterých je funkce $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-4}$ rostoucí, resp. klesající.

2) Určete hodnost matice

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\ 2 & 2 & 1 & -1\\ 3 & 1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

3) Nalezněte maximum funkce $z = 5x_1 + x_2 + 3x_3$ za podmínek:

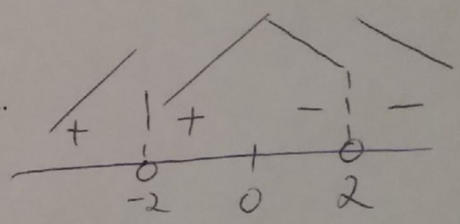
$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 4$$
$$2x_1 + 2x_3 \le 2$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

4) Vypočítejte neznámou y pomocí Cramerova pravidla.

$$x + y - z = -1$$
$$2x - y + 2z = 8$$
$$x - 3y + 2z = 3$$

Teorie:

3) Napište vzorec pro výpočet Taylorova polynomu.
4) Napište L´Hospitalovo pravidlo a uveďte jednoduchý příklad.



1) $D_f = \mathbb{R} - \{-2; 2\}$

$$f' = \frac{2x(x^2-4) - x^2 \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{2x^3-8x-2x^3}{(x^2-4)^2} = \frac{-8x}{(x^2-4)^2}$$

$$\frac{-8x}{(x^2-4)^2} = 0$$
$$x = 0$$

rost. $(-\infty; -2), (-2; 0\rangle$
kles. $\langle 0; 2); (2; \infty)$

2) $$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\ 2 & 2 & 1 & -1\\ 3 & 1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 3 & -5\\ 0 & 1 & 3 & -4\\ 0 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 3 & -5\\ 0 & 0 & -3 & 3\\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{-3} & \cancel{3}\end{pmatrix} \quad h = 3$$

4) $$A = \begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 2\\ 1 & -3 & 2\end{vmatrix} = -2+6+2-1+6-4 = 7$$

$$A_2 = \begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ 2 & 8 & 2\\ 1 & 3 & 2\end{vmatrix} = 16-6-2+8-6+4 = 14$$

$$y = \frac{|A_2|}{|A|} = \underline{\underline{2}}$$

3)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
x_4	3	2	4	1	0	4	$\frac{4}{3}$
x_5	$\boxed{2}$	0	2	0	1	2	1
R	$\boxed{-5}$	-1	-3	0	0	0	

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
x_4	0	$\boxed{2}$	1	1	$-\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
x_1	1	0	1	0	$\frac{1}{2}$	1	=
R	0	-1	2	0	$\frac{5}{2}$	5	

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	
x_1	1	0	1	0	$\frac{1}{2}$	1	
R	0	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{11}{2}$	✓

$x_1 = 1$

$x_2 = \frac{1}{2}$

$x_3 = x_4 = x_5 = 0 \qquad R = \frac{11}{2}$