

TEORIE: (min. 50 %)

- 1) Napište, jaký má význam první derivace pro průběh funkce.
- 2) Vysvětlete pojmy stacionární bod a inflexní bod.
- 3) Definujte inverzní funkci k funkci $y = \cos x$. Určete definiční obor a obor hodnot obou funkcí. Načrtněte grafy obou funkcí.
- 4) Načrtněte grafy funkcí $f(x)$, $g(x)$ pro které platí:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \infty$$

OTÁZKA	1	2	3	4	CELKEM
BODY	10	10	10	10	40

PŘÍKLADY: (min. 50 %)

- 1) Vypočtete integrál: $\int \left(\frac{2}{x} - \sqrt[3]{x} + x \ln x \right) dx$
- 2) Vypočítejte limitu: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$
- 3) Určete maximální intervaly, na kterých je funkce $f(x) = x + \frac{4}{x}$ rostoucí či klesající.
Určete lokální extrémy funkce.
- 4) Určete všechny asymptoty funkce: $f(x) = \frac{1 - x^2}{x - 2}$.

PŘÍKLAD	1	2	3	4	CELKEM
BODY	10	10	10	10	40

PŘÍKLADY: (min. 50 %)

- Vypočítejte integrál: $\int \left(\frac{2}{x} - \sqrt[3]{x} + x \ln x \right) dx$
- Vypočítejte limitu: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$
- Určete maximální intervaly, na kterých je funkce $f(x) = x + \frac{4}{x}$ rostoucí či klesající.
Určete lokální extrémy funkce.
- Určete všechny asymptoty funkce: $f(x) = \frac{1 - x^2}{x - 2}$.

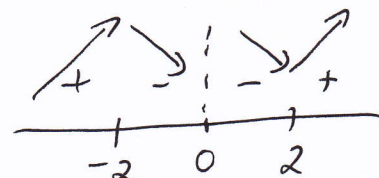
PŘÍKLAD	1	2	3	4	CELKEM
BODY	10	10	10	10	40

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int \frac{2}{x} - x^{\frac{1}{3}} + x \ln x \, dx &= 2 \ln |x| - \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + \int x \cdot \ln x \, dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \quad u' = \frac{1}{x} \\ v' = x \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| \\ &= 2 \ln |x| - \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} + \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} \, dx = 2 \ln |x| - \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} + \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx \\ &= 2 \ln |x| - \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} + \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} &= \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{\text{CH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x \cos x}{\sin x} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{\text{CH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \cos x + x(-\sin x)}{\cos x} \\ &= \frac{1 + 1 + 0}{1} = \underline{\underline{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} Df &= \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad f = x + 4x^{-1} \\ f' &= 1 + (-4x^{-2}) = 1 - \frac{4}{x^2} \end{aligned}$$

$1 - \frac{4}{x^2} = 0$
 $x^2 - 4 = 0$
 $x = \pm 2$



rost. $(-\infty, -2), (2, \infty)$
 kles. $(-2, 0), (0, 2)$, lok. max. $[-2, -4]$, lok. min. $[2, 4]$

$$\textcircled{4} Df = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1 - x^2}{x - 2} = \left[\frac{-3}{0^+} \right] = -\infty \Rightarrow \text{as. bez směrnic } \underline{\underline{x = 2}}$$

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - x^2}{(x - 2)x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - x^2}{x^2 - 2x} = -1$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - x^2}{x - 2} + x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - x^2 + x^2 - 2x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - 2x}{x - 2} = -2$$

as. se směrnicí $\underline{\underline{y = -x - 2}}$

Variantá 14

Jméno:	Narození:	Obor:
Přednášející:	Cvičící:	Datum:

- (1) Vysvětlete, zda existuje inverzní funkce k funkci $f(x) = x^2$ definované na intervalu $\langle 0, +\infty \rangle$. Pokud existuje, nakreslete její graf a uveďte, o jakou funkci se jedná. Uveďte dále definiční obor a obor hodnot této inverzní funkce.
 - (2) Vysvětlete pojem funkce prostá v intervalu. Rozhodněte, zda funkce $\sin x$ je prostá v intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$.
 - (3) Vysvětlete pojem lokální minimum funkce f v bodě $c \in I$, kde $I \in \mathcal{R}$ je interval.
 - (4) Uveďte větu o derivaci součinu a podílu dvou funkcí.
-

- (5) Vypočtete limitu funkce $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5}{5^x}$.
- (6) Vypočtete derivaci funkce $f(x) = 7^{\sqrt{x^2+x+2}}$.
- (7) Určete maximální intervaly, na nichž je funkce $f(x) = x \cdot \ln^2 x$ rostoucí, resp. klesající.
- (8) Vypočtete integrál

$$\int \sqrt{x} \cdot \ln x \, dx.$$

Varianta 14

Jméno:	Narození:	Obor:
Přednášející:	Cvičící:	Datum:

- (1) Vysvětlete, zda existuje inverzní funkce k funkci $f(x) = x^2$ definované na intervalu $(0, +\infty)$. Pokud existuje, nakreslete její graf a uveďte, o jakou funkci se jedná. Uveďte dále definiční obor a obor hodnot této inverzní funkce.
- (2) Vysvětlete pojem funkce prostá v intervalu. Rozhodněte, zda funkce $\sin x$ je prostá v intervalu $(0, 2\pi)$.
- (3) Vysvětlete pojem lokální minimum funkce f v bodě $c \in I$, kde $I \in \mathcal{R}$ je interval.
- (4) Uveďte větu o derivaci součinu a podílu dvou funkcí.

(5) Vypočtěte limitu funkce $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5}{5^x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \frac{5 \times 114}{\infty} = 0$

(6) Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = 7^{\sqrt{x^2+x+2}}$. $f' = 7^{\sqrt{x^2+x+2}} \cdot \ln 7 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+x+2}} \cdot (2x+1)$

- (7) Určete maximální intervaly, na nichž je funkce $f(x) = x \cdot \ln^2 x$ rostoucí, resp. klesající.

$f' = \ln^2 x + x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \quad Df(0, \infty)$

- (8) Vypočtěte integrál

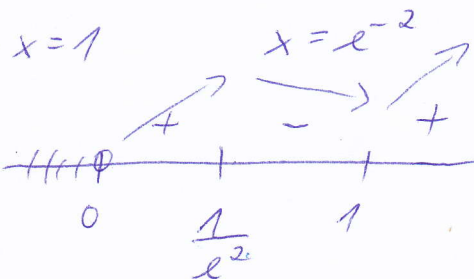
$\int \sqrt{x} \cdot \ln x \, dx.$

$u = \ln x \quad u' = \frac{1}{x}$
 $v' = x^{\frac{1}{2}} \quad v = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}$

$= \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} \ln x - \frac{2}{3} \int x^{\frac{1}{2}} =$

$= \frac{2\sqrt{x^3}}{3} \ln x - \frac{2}{3} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} \ln x - \frac{4}{9} \sqrt{x^3} + C$

$\ln x = 0 \quad \ln x = -2$



Varianta 29

Jméno:	Narození:	Obor:
Přednášející:	Cvičící:	Datum:

- (1) Uveďte znění l'Hospitalova pravidla.
- (2) Uveďte definici derivace funkce f v bodě c .
- (3) Uveďte nutnou podmínku pro lokální extrém funkce.

- (4) Rozhodněte, zda platí tvrzení: Je-li funkce f (definovaná v intervalu (a,b) , $a < b$) spojitá v bodě $c \in (a,b)$, má v bodě c derivaci.

Uveďte inverzní funkci k funkci $y = \cos x$. Uveďte $D(f)$, $H(f)$ obou funkcí.

- (5) Vypočtěte limitu $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$.

- (6) Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = 3^{\sin x^2}$.

- (7) Určete lokální maximum a lokální minimum funkce $f(x) = 2x^3 - 3x^2$.

- (8) Vypočtěte integrál

$$\int x \cdot 2^{-x} dx.$$

Varianta 29

Jméno: Narození: Obor:
 Přednášející: Cvičící: Datum:

- (1) Uveďte znění l'Hospitalova pravidla.
- (2) Uveďte definici derivace funkce f v bodě c .
- (3) Uveďte nutnou podmínku pro lokální extrém funkce.

- (4) Rozhodněte, zda platí tvrzení: Je-li funkce f (definovaná v intervalu (a,b) , a $k(b)$) spojitá v bodě $c \in (a,b)$, má v bodě c derivaci.

Ukaže inverzní funkci k funkci $y = \cos x$. Ukaže $D(f)$, $H(f)$ obou funkcí!

- (5) Vypočtěte limitu $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} \stackrel{LH}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x \cdot 2}{\cos 3x \cdot 3} = \frac{2}{3}$

- (6) Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = 3^{\sin x^2}$. *$3^{\sin x^2} \cdot \ln 3 \cdot \cos x^2 \cdot 2x$*

- (7) Určete lokální maximum a lokální minimum funkce $f(x) = 2x^3 - 3x^2$. *$Df = R$*

- (8) Vypočtěte integrál

$$\int x \cdot 2^{-x} dx.$$

$$u = x \quad u' = 1$$

$$v = 2^{-x} \quad v' = \frac{2^{-x}}{-\ln 2}$$

$$= \frac{x 2^{-x}}{-\ln 2} - \int \frac{2^{-x}}{-\ln 2} = \frac{x 2^{-x}}{-\ln 2} - \frac{2^{-x}}{(\ln 2)^2}$$

$$f' = 6x^2 - 6x$$

$$6x(x-1)$$

$$x=0 \quad x=1$$

$$\max [0, 0]$$

$$\min [1, -1]$$

Teorie:

1. Vysvětlete pojem funkce sudé a liché – doložte příklady
2. Nakreslete funkci $y = \arccos x$ a vysvětlete, jakým způsobem je zavedena
3. Co je to diferenciál a jak se používá k přibližným výpočtům – vysvětlete na příkladě
4. Vysvětlete pojem neurčitého integrálu

Příklady:

1. Stanovte definiční obor funkce $y = \sqrt{\frac{x-3}{x^2+5x+6}} + \ln(10-x)$

2. Zderivujte funkci $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2}$ a vypočtěte hodnotu derivace v bodě $x = 1$

3. Najděte Taylorův rozvoj 3. stupně pro mnohočlen $y = x^5 - 3x^3 + x^2 - x + 3$

v bodě $x = -1$.

Ukážte lokální extrémny funkce $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

4. Spočtěte integrál $\int \frac{x^5}{\sin x} \left(\frac{\sin x}{x^2} + \frac{e^x \sin x}{x^4} \right) dx$