

TEORIE: (min. 50 %)

- 1) Uveďte Weierstrassovu větu o extrémeh spojité funkce na kompaktní množině.
- 2) Uveďte větu o významu druhé derivace pro průběh funkce.
- 3) Co je to *normála*? Jak zjistíme rovnici normály ke grafu funkce f v daném bodě x_0 ?
- 4) Načrtněte graf funkce $g(x)$, která je sudá, zdola omezená a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$$

Dále pak určete obor hodnot této funkce.

OTÁZKA	1	2	3	4	CELKEM
BODY	10	10	10	10	40

PŘÍKLADY: (min. 50 %)

- 1) Vypočtěte integrál: $\int x^2 \cos x dx$
- 2) Vypočítejte limitu: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - e^{x^2 - x}}{x + \cos(\pi x)}$
- 3) Určete maximální intervaly, na kterých je funkce $f(x) = \frac{x}{(x-2)^2}$ rostoucí a klesající.

Dále určete lokální extrémy funkce.

- 4) Určete všechny asymptoty funkce $f(x) = \frac{x^3 + 3}{x^2 - 9}$.

PŘÍKLAD	1	2	3	4	CELKEM
BODY	10	10	10	10	40

PŘÍKLADY: (min. 50 %)

- Vypočtěte integrál: $\int x^2 \cos x dx$
- Vypočítejte limitu: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - e^{x^2-x}}{1 + \cos(\pi x) + x - 1}$
- Určete maximální intervaly, na kterých je funkce $f(x) = \frac{x}{(x-2)^2}$ rostoucí a klesající.
Dále určete lokální extrémy funkce.
- Určete všechny asymptoty funkce $f(x) = \frac{x^3 + 3}{x^2 - 9}$.

PŘÍKLAD	1	2	3	4	CELKEM
BODY	10	10	10	10	40

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} \int x^2 \cos x dx &= \left| \begin{array}{l} u = x^2 \quad u' = 2x \\ v' = \cos x \quad v = \sin x \end{array} \right| = x^2 \sin x - \int 2x \sin x dx = \\
 &= x^2 \sin x - \left(2x \cos x - \int 2 \cos x dx \right) = \\
 &= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \int \cos x dx = \\
 &= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C
 \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - e^{x^2-x}}{1 + \cos(\pi x) + x - 1} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-e^{x^2-x} \cdot (2x-1)}{-\sin(\pi x) \cdot \pi + 1} = \frac{-1 \cdot (2-1)}{0 \cdot \pi + 1} = -1$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{3} Df &= \mathbb{R} \setminus \{2\} \\
 f' &= \frac{(x-2)^2 - x \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{(x-2)[x-2-2x]}{(x-2)^4} = \frac{(-2-x)}{(x-2)^3} \\
 \frac{-2-x}{(x-2)^3} &= 0 \Rightarrow -2-x=0 \Rightarrow -2=x \\
 \text{sign chart: } & \begin{array}{c} \swarrow \quad \nearrow \\ - \quad + \quad - \\ \hline -2 \quad 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{kles. } (-\infty, -2), \\ (2, \infty) \\ \text{rost. } (-2, 2) \\ \text{lok. min. } [-2, -\frac{1}{8}] \end{array}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{4} Df &= \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\} \\
 \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^3+3}{x^2-9} &= \left[\frac{30}{0^+} \right] = +\infty \Rightarrow \text{as. bez směřnice } x = -3 \\
 \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^3+3}{x^2-9} &= \left[\frac{-24}{0^-} \right] = +\infty \\
 h &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3+3}{(x^2-9)x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3+3}{x^3-9x} = 1 \\
 g &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3+3}{x^2-9} - x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3+3-x^3+9x}{x^2-9} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{9x+3}{x^2-9} = 0 \\
 \text{as. se směřn. } & \underline{y = x}
 \end{aligned}$$

TEORIE: (min. 50 %)

- 1) Vysvětlete, co je to funkce prostá a uveďte příklad funkce, která prostá je a funkce, která prostá není. (tj. rovnici a graf těchto funkcí)
- 2) Jak lze využít druhou derivaci při vyšetřování průběhu funkce?
- 3) Definujte spojitou funkci f v bodě a .
- 4) Co je to primitivní funkce k funkci $f(x)$?

OTÁZKA	1	2	3	4	CELKEM
BODY	10	10	10	10	40

PŘÍKLADY: (min. 50 %)

- 1) Napište Taylorův polynom stupně dva funkce $f(x) = e^{2x-x^2}$ v bodě $x_0 = 0$.
- 2) Vypočítejte limitu: $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$.
- 3) Určete maximální intervaly, na kterých je funkce $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 4}$ rostoucí či klesající.
Určete lokální extrémy funkce.
- 4) Vypočítejte neurčitý integrál: $\int x^2 e^{-x} dx$.

PŘÍKLAD	1	2	3	4	CELKEM
BODY	10	10	10	10	40

PŘÍKLADY: (min. 50 %)

- 1) Napište Taylorův polynom stupně dva funkce $f(x) = e^{2x-x^2}$ v bodě $x_0 = 0$.
- 2) Vypočítejte limitu: $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$.
- 3) Určete maximální intervaly, na kterých je funkce $f(x) = \frac{2x}{x^2-4}$ rostoucí či klesající.
Určete lokální extrémy funkce.
- 4) Vypočítejte neurčitý integrál: $\int x^2 e^{-x} dx$.

PŘÍKLAD	1	2	3	4	CELKEM
BODY	10	10	10	10	40

① $f = e^{2x-x^2}$
 $f' = e^{2x-x^2} \cdot (2-2x)$
 $f'' = e^{2x-x^2} \cdot (2-2x)^2 + e^{2x-x^2} \cdot (-2)$
 $f(0) = 1$
 $f'(0) = 2$
 $f''(0) = 0$
 $T_2(x) = 1 + 2x$

② $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = [\infty \cdot 0] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{1}{x} \cdot (-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}} = [\cos 0] = 1$

③ $Df = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$
 $f' = \frac{2(x^2-4) - 2x \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{2x^2-8-4x^2}{(x^2-4)^2} = \frac{-2x^2-8}{(x^2-4)^2}$
 $-2x^2-8 = 0$
 $-2x^2 = 8$
 $x^2 \neq -4$
 $\rightarrow$
 $\begin{array}{c} \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ -2 \quad 2 \end{array}$
 kles. $(-\infty, -2), (-2, 2), (2, \infty)$
 nemá lok. extr.

④ $\int x^2 \cdot e^{-x} dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2 \quad u' = 2x \\ v' = e^{-x} \quad v = -e^{-x} \end{array} \right| = -x^2 e^{-x} - \int 2x(-e^{-x}) dx =$
 $= -x^2 e^{-x} + \int 2x e^{-x} dx = \left| \begin{array}{l} u = 2x \quad u' = 2 \\ v' = e^{-x} \quad v = -e^{-x} \end{array} \right| = -x^2 e^{-x} + 2x(-e^{-x}) - \int 2(-e^{-x}) dx$
 $= -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} + 2 \int e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x} + C$

TEORIE: (min. 50 %)

- 1) Napište nutnou podmínku pro lokální extrém.
- 2) Napište l'Hospitalovo pravidlo.
- 3) Určete, kdy existuje asymptota bez směrnice, jakou má rovnici a jak vypadá její graf.
- 4) Nakreslete graf funkce $f(x) = \cotg x$, uveďte $D(f)$ a $H(f)$ této funkce. Dále uveďte inverzní funkci k této funkci, také určete $D(f)$ a $H(f)$ a nakreslete její graf. Co platí pro graf funkce $f(x)$ a inverzní funkce?

OTÁZKA	1	2	3	4	CELKEM
BODY	10	10	10	10	40

PŘÍKLADY: (min. 50 %)

- 1) Napište Taylorův polynom stupně tři funkce $f(x) = x^3 \ln x$ v bodě $x_0 = 1$.
- 2) Vypočítejte limitu: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x - 3 \cdot 2^{2x}}{5^x + 1}$.
- 3) Určete maximální intervaly, na kterých je funkce $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ konvexní či konkávní.
Určete inflexní body.
- 4) Vypočítejte neurčitý integrál: $\int \left(\frac{x-1+\sqrt{x}}{x^2} + \ln x \right) dx$.

PŘÍKLAD	1	2	3	4	CELKEM
BODY	10	10	10	10	40

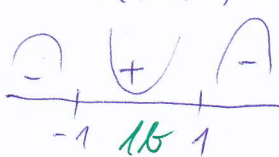
PŘÍKLADY: (min. 50 %)

- 1) Napište Taylorův polynom stupně tři funkce $f(x) = x^3 \ln x$ v bodě $x_0 = 1$.
- 2) Vypočítejte limitu: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x - 3 \cdot 2^{2x}}{5^x + 1}$.
- 3) Určete maximální intervaly, na kterých je funkce $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ konvexní či konkávní. Určete inflexní body.
- 4) Vypočítejte neurčitý integrál: $\int \left(\frac{x-1+\sqrt{x}}{x^2} + \ln x \right) dx$.

PŘÍKLAD	1	2	3	4	CELKEM
BODY	10	10	10	10	40

① $f = x^3 \cdot \ln x$ 1b
 $f' = 3x^2 \cdot \ln x + x^3 \cdot \frac{1}{x} = 3x^2 \cdot \ln x + x^2$ 1b
 $f'' = 6x \cdot \ln x + 3x^2 \cdot \frac{1}{x} + 2x = 6x \ln x + 5x$ 1b
 $f''' = 6 \ln x + 6x \cdot \frac{1}{x} + 5 = 6 \ln x + 11$ 1b
 $T_3(x) = 0 + (x-1) + \frac{5}{2}(x-1)^2 + \frac{11}{3!}(x-1)^3$ 3b

② $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x - 3 \cdot 4^x}{5^x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4^x \left(\left(\frac{3}{4} \right)^x - 3 \right)}{5^x \left(1 + \left(\frac{1}{5} \right)^x \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{5} \right)^x \frac{\left(\frac{3}{4} \right)^x - 3}{1 + \left(\frac{1}{5} \right)^x} = \left[0, \frac{-3}{1} \right] = 0$ 3b

③ $Df = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ 1b
 $f' = \frac{-(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$ 2b
 $f'' = \frac{2(1-x^2)^2 - 2x \cdot 2(1-x^2)(-2x)}{(1-x^2)^4} = \frac{(1-x^2)[2-2x^2+8x^2]}{(1-x^2)^4} = \frac{6x^2+2}{(1-x^2)^3}$ 4b
 $6x^2+2=0 \Rightarrow x^2 = -\frac{1}{3}$ 1b
 1b
 konkávní $(-\infty, -1), (-1, 1)$, konvex. $(1, \infty)$, inflex. nejsou

④ $\int \frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2} + \ln x \, dx = \int \frac{1}{x} - x^{-2} + x^{-\frac{3}{2}} + \ln x \, dx = \ln|x| - \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + \int \ln x \, dx =$
 $= \ln|x| + \frac{1}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + \int \ln x \, dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{matrix} \right| = \ln|x| + \frac{1}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx =$
 $= \ln|x| + \frac{1}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + x \ln x - x + C$ 4b
2b 2b

TEORIE: (min. 50 %)

- 1) V jakém případě neexistuje k funkci $f(x)$ funkce inverzní? Uveďte příklad takové funkce.
- 2) Napište definici derivace funkce $f(x)$ v bodě a .
- 3) Načrtněte graf funkce, která není spojitá v bodě $x = 0$, je omezená zdola a je sudá. Určete definiční obor a obor hodnot této funkce.
- 4) K čemu a jak se používá metoda *Per partes*?

OTÁZKA	1	2	3	4	CELKEM
BODY	10	10	10	10	40

PŘÍKLADY: (min. 50 %)

- 1) Určete definiční obor funkce $f(x) = \sqrt{-x^2 - x + 2} + \arccos \frac{x-1}{2} + \ln \frac{2-x}{x}$
- 2) Vypočítejte limitu: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+2} \right)^x$.
- 3) Určete první derivaci funkce $f(x) = \sqrt{e^{x^2}} \cdot \arcsin 3x$
- 4) Vypočítejte neurčitý integrál: $\int \left(\sqrt[3]{x} + \operatorname{tg} x + \frac{x}{x^2+1} - \frac{3}{x^2+1} \right) dx$.

PŘÍKLAD	1	2	3	4	CELKEM
BODY	10	10	10	10	40

PŘÍKLADY: (min. 50 %)

1) Určete definiční obor funkce $f(x) = \sqrt{-x^2 - x + 2} + \arccos \frac{x-1}{2} + \ln \frac{2-x}{x}$

2) Vypočítejte limitu: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+2} \right)^x$.

3) Určete první derivaci funkce $f(x) = \sqrt{e^{x^2} \cdot \arcsin 3x}$

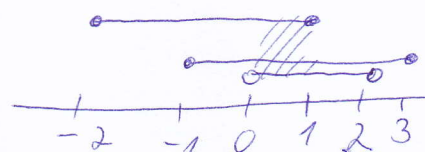
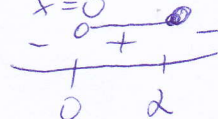
4) Vypočítejte neurčitý integrál: $\int \left(\sqrt[3]{x} + \operatorname{tg} x + \frac{x}{x^2+1} - \frac{3}{x^2+1} \right) dx$.

PŘÍKLAD	1	2	3	4	CELKEM
BODY	10	10	10	10	40

① $-x^2 - x + 2 \geq 0 \quad -1 \leq \frac{x-1}{2} \leq 1 \quad \frac{2-x}{x} > 0$

$-(x^2 + x - 2) \geq 0 \quad -2 \leq x-1 \leq 2$

$-(x-1)(x+2) \geq 0 \quad -1 \leq x \leq 3$



$Df = (0, 1)$

② $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x(1 - \frac{1/2}{x})}{2x(1 + \frac{1}{x})} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1 - \frac{1/2}{x})^x}{(1 + \frac{1}{x})^x} = \frac{e^{-1/2}}{e^1} = e^{-3/2}$

③ $f' = \frac{1}{2\sqrt{e^{x^2} \arcsin 3x}} \cdot \left(e^{x^2} \cdot 2 \cdot \arcsin 3x + e^{x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}} \cdot 3 \right)$

④ $\int x^{\frac{1}{3}} + \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{3}{x^2+1} dx =$

$\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + \left(-\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx \right) + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx - 3 \int \frac{1}{x^2+1} dx =$

$= \frac{3}{4} \sqrt[4]{x^4} - \ln |\cos x| + \frac{1}{2} \ln |x^2+1| - 3 \operatorname{arctg} x + c$