**TEORIE: (min. 50 %)**

1) Napište větu o významu druhé derivace pro průběh funkce.
2) Vysvětlete, co je limita funkce v nevlastním bodě.
3) Uveďte příklad funkce (tj. její rovnici a graf), která je omezená pouze shora a funkce, která je omezená pouze zdola.
4) Napište rovnici inverzní funkce k funkci y = arcsin x. Určete definiční obor a obor hodnot obou funkcí.

**PŘÍKLADY: (min. 50 %)**

1) Vypočtěte integrál: $\int \left(2e^{2x} - x^2 \ln x\right) dx$
2) Najděte lokální extrémy funkce: $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$
3) Vypočítejte limitu funkce: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}{x}$
4) Určete první derivaci funkce: $f(x) = x^3 \ln \sqrt{2x - 3}$

*zkoušková písemka* *skupina B* ------------------------------

**TEORIE: (min. 50 %)**

1) Vysvětlete pojmy stacionární bod a inflexní bod.
2) Napište definici derivace funkce *f* v bodě *a*.
3) Napište rovnici a načrtněte graf funkce, která je sudá a omezená shora. Určete u této funkce definiční obor a obor hodnot.
4) Uveďte k čemu a jak se používá metoda per partes.

**PŘÍKLADY: (min. 50 %)**

1) Vypočtěte integrál: $\int \left( \sin 3x + x\sqrt{x} - \frac{x + x^2}{x^3} \right) dx$
2) Určete maximální intervaly na kterých je funkce f(x) konvexní či konkávní. Určete inflexní bod.
$$f(x) = xe^x$$
3) Vypočítejte limitu funkce: $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1 + x \sin x}{\cos x - 1}$
4) Určete definiční obor funkce: $f(x) = \ln \frac{2x - 1}{x + 3} - \sin x + \sqrt{-x^2 + x + 2}$

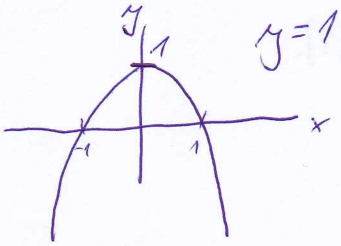
skupina A

1) Buď $f$ funkce mající druhou derivaci na otevřeném intervalu $I$, je-li $f''(x) > 0$ na int. $I$, pak je fce $f$ konvexní na $I$, je-li $f''(x) < 0$ na int. $I$, pak je fce $f$ konkávní na $I$.

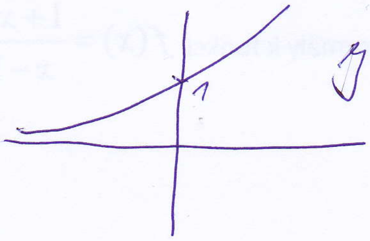
2) Fce $f$ má v nevl. bodě $\pm\infty$ limitu $L$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje reálné číslo $x_0$ tak, že pro všechna $x > x_0$ platí že $f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

( neboli limita v nevl. bodě je tato limita: $\lim_{x\to\infty} f(x)$
$\lim_{x\to-\infty} f(x)$ )

3) omezená shora č. 1 omezená zdola 0



$y = 1 - x^2$



$y = e^x$

4) $y = \arcsin x$ $f^{-1}: y = \sin x$

$Df = \langle -1, 1 \rangle$ $Df^{-1} = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$

$Hf = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ $Hf^{-1} = \langle -1, 1 \rangle$

---

1) $\int 2e^{2x} - x^2 \ln x \, dx = \int 2e^{2x} dx - \int x^2 \ln x \, dx =$

$= 2 \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \int x^2 \ln x \, dx = \left| \begin{matrix} g = \ln x & g' = \frac{1}{x} \\ f' = x^2 & f = \frac{x^3}{3} \end{matrix} \right| =$

vzorec $\int f(ax+b) = \frac{F(ax+b)}{a}$ per partes

$= e^{2x} - \left[ \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^3}{3} dx \right] = e^{2x} - \frac{x^3}{3} \ln x + \int \frac{x^2}{3} dx =$

$= e^{2x} - \frac{x^3}{3} \ln x + \frac{x^3}{9} + c$

2) $f = \frac{x}{x^2+1}$ $Df = R$

$f' = \frac{1(x^2+1) - x \cdot (2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

$$\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}=0$$

$$1-x^2=0$$

$$x^2=1$$

$$x=\pm 1$$

$$\begin{array}{ccccc} \searrow & & \nearrow & & \searrow \\ - & & + & & - \\ \hline & -1 & & 1 & \end{array}$$

lok. min. $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$

lok. max. $\left[1, \frac{1}{2}\right]$

dosazuji do zadání

$x=1$

$$y=\frac{1}{1^2+1}=\frac{1}{2}$$

(3) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{LH}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{2+x}}}{1}=\underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{2}}}}$$

(4) $$f=x^3\cdot\ln\sqrt{2x-3}$$

$$f'=3x^2\cdot\ln\sqrt{2x-3}+x^3\cdot\frac{1}{\sqrt{2x-3}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2x-3}}\cdot 2$$

$$=\underline{\underline{3x^2\ln\sqrt{2x-3}+\frac{x^3}{2x-3}}}$$

skupina B

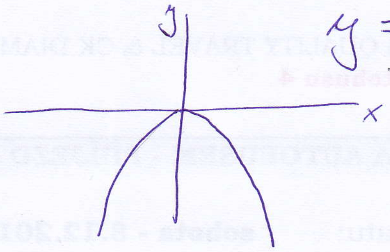
① Řekneme, že bod $x_0$ je stacionárním bodem fce $f$, jestliže fce $f$ má v bodě $x_0$ nulovou derivaci; tj: $f'(x_0)=0$.

Bod ve kterém se mění charakter fce z konvexní na konkávní nebo naopak nazýváme inflexním bodem fce $f$.

② Řekneme, že fce $f$ má v bodě $a \in R$ derivaci, je-li $f$ definována v okolí bodu $a$ a existuje-li limita

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

③ sudá a om. shora 0



$y=-x^2$

$Df = R$

$Hf = (-\infty; 0\rangle$

④ Per partes - používá se k integrování součinu funkcí

$$\int f'\cdot g = f\cdot g - \int f\cdot g'$$

---

① $\cancel{\int \sin 2x + x\sin x^2\,dx = \int \sin 2x\,dx + \int x \sin x^2\,dx =}$

$$\int \sin 3x + x\sqrt{x} - \frac{x+x^2}{x^3}\,dx = \int \sin 3x + x\cdot x^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{x}{x^3}+\frac{x^2}{x^3}\right)dx$$

$$= \int \sin 3x + x^{\frac{3}{2}} - x^{-2} - \frac{1}{x}\,dx = -\frac{\cos 3x}{3} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{x^{-1}}{-1} - \ln|x| =$$

$$= -\frac{\cos 3x}{3} + \frac{2\sqrt{x^5}}{5} + \frac{1}{x} - \ln|x| + c$$

② $f = x\cdot e^x \quad Df = R$

$f' = e^x + xe^x = e^x(1+x)$

$f'' = e^x(1+x) + e^x\cdot 1 = e^x(x+2)$

$e^x(x+2) = 0$

$x+2 = 0$

$x = -2$

$-\quad +$

$-2$

konvexní $\langle -2, \infty)$

konkávní $(-\infty, -2\rangle$

infl. bod $[-2; -2e^{-2}]$

3

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1+x\sin x}{\cos x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{LH}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x+\sin x+x\cos x}{-\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x}{-\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{LH}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+x(-\sin x)}{-\cos x}=$$

$$=\frac{1+0}{-1}=-1$$

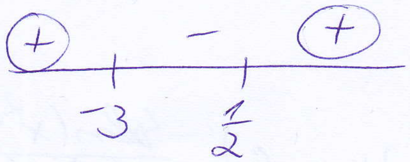
4

$$f(x)=\ln\frac{2x-1}{x+3}-\sin x+\sqrt{-x^2+x+2}$$

$$\frac{2x-1}{x+3}>0$$

$2x-1=0$ $\quad x+3=0$

$x=\frac{1}{2}$ $\quad x=-3$

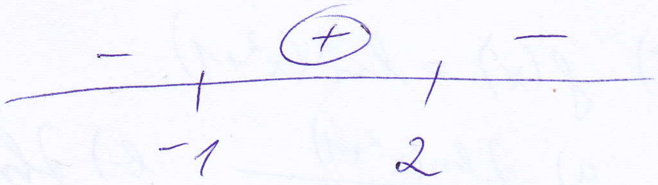


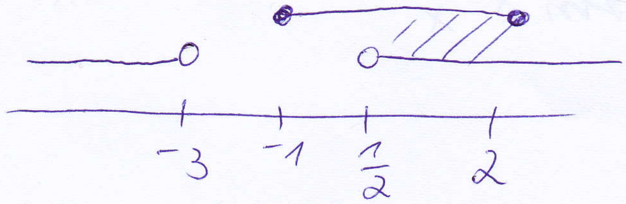
$$-x^2+x+2\geq 0$$

$$-1\cdot(x^2-x-2)\geq 0$$

$$-(x-2)(x+1)\geq 0$$

$x=2$ $\quad x=-1$





$$Df=\left(\frac{1}{2},2\right>$$