Ukázková zkoušková písemka skupina A

1) Napište, jaký má význam první derivace pro průběh funkce.

2) Popište všechny způsoby, jak lze vyřešit soustavu lineárních rovnic. Uveďte podmínky, za kterých lze daný postup použít.

3) Určete inverzní funkci k funkci *f* a dále určete definiční obor a obor hodnot obou funkcí.

$$f(x) = \ln(x+3) - 4$$

4) Určete intervaly, na kterých je funkce *f* klesající, resp. rostoucí.

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

5) Napište rovnici tečny k funkci *f* v bodě $x_0 = 3$.

$$f(x) = x^2 - x + 1$$

6) Vypočítejte inverzní matici k matici *A*.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -4 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

7) Cramerovým pravidlem vypočítejte ze soustavy rovnic neznámou x_1.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 &= 2 \\ 2x_2 - x_3 &= -2 \end{aligned}$$

8) Určete matici *X*.

$X = A * B - 2C$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) nechť fce f má vlastní první derivaci $f'(x)$ ve všech bodech otevřeného intervalu I, potom

je-li $f'(x) > 0 \quad \forall x \in I$ je fce f rostoucí na I,

je-li $f'(x) < 0 \quad \forall x \in I$ je fce f klesající na I,

je-li $f'(x) = 0 \quad \forall x \in I$ je fce f konstantní na I.

2) • eliminace (řádkovými úpravami převádíme matici do Gaussova tvaru) - lze použít vždy

• pomocí inverzní matice: $x = A^{-1} \cdot b$

A = matice soustavy, b = sloupec pravých stran

lze použít pouze když je A regulární (tj. čtvercová a $\det A \neq 0$) → pouze když má soust. 1 řeš.

• Cramerovo pravidlo $x_i = \dfrac{\det A_i}{\det A}$

A_i = matice A ve které i-tý sloupec vyměníme za sloupec pravých stran

lze použít také pouze když A je regulární, tj. když soust. má 1 řeš.

3) $f: y = \ln(x+3) - 4$ $\qquad D_f: x+3 > 0$ $\qquad D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

$x > -3$

$(-3, \infty)$ $\qquad H_{f^{-1}} = (-3, \infty)$

$f^{-1}: x = \ln(y+3) - 4$

$x + 4 = \ln(y+3)$

$e^{x+4} = y + 3$ $\qquad H_f = \mathbb{R}$

$e^{x+4} - 3 = y$

4) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ $\qquad x^2 + 1 \neq 0$, $x^2 \neq -1$ ✓ $\quad D_f = \mathbb{R}$

$$f' = \frac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2 - 2x^2}{(x^2+1)^2}$$

$\dfrac{2-2x^2}{(x^2+1)^2} = 0$

$2 - 2x^2 = 0$

$2(1 - x^2) = 0$

$2(1-x)(1+x) = 0$

$x = 1 \quad x = -1$

$-\ \ |_{-1}\ \ +\ \ |_{1}\ \ -$

kles. $(-\infty, -1\rangle, \langle 1, \infty)$

rost. $\langle -1, 1 \rangle$

5) $f(x) = x^2 - x + 1$ $\qquad x_0 = 3$

$y_0 = 3^2 - 3 + 1 = 7$

$f'(x) = 2x - 1$ $\qquad f'(x_0) = 2 \cdot 3 - 1 = 5$

$t: y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$ $\qquad y = 5x - 8$

$y = 5 \cdot (x-3) + 7$

6)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 5 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) :(-3) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ -2 & 5 & -4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} |\cdot(2) \\ \sim \\ + \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \ominus \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & \frac{1}{3} & 2 \end{array}\right) \begin{matrix} \sim /(2) + \\ \\ /:(-2) \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & -1 \end{array}\right) \ominus \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & -1 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & -1 \end{pmatrix}$$

7)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} \qquad \det A = -1 + 4 + 0 - 0 + 6 - 4 = 5$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \det A_1 = -1 - 4 + 12 - 2 + 6 + 4 = 15$$

$$x_1 = \frac{15}{5} = \underline{\underline{3}}$$

8)

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 11 & 2 & -7 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -7 & -1 & 0 \\ 7 & 0 & -3 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}}}$$

Ukázková zkoušková písemka skupina B

1) Definujte pojem inverzní matice a popište výpočet této matice.

2) Vysvětlete, zda existuje inverzní funkce k funkci *y = arcsin x*. Pokud existuje, uveďte, o jakou funkci se jedná. Dále nakreslete grafy a uveďte definiční obor a obor hodnot obou funkcí.

3) Určete intervaly, na kterých je funkce *f* konvexní, resp. konkávní.

$$f(x) = \frac{4}{x^2 - 4}$$

4) Určete první derivaci funkce *f*.

$$f(x) = e^{-x} \cdot \sqrt{2x-3}$$

5) Určete lokální extrémy funkce

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$$

6) Určete hodnost matice *A*.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

7) Vypočítejte neznámou matici *X* z maticové rovnice:

AX – 2A = BX – C

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

8) Vypočítejte determinant matice:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

1) Inverzní matice A^{-1} k matici A je matice pro kterou platí: $A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = I$ (I = jednotková matice)

Inverzní matice existuje pouze k regulární matici.

Výpočet: $(A|I) \sim$ řádk. úpravami převedeme matici A na jednotkovou $\sim (I|A^{-1})$

Nebo lze vypočítat matici A^{-1} pomocí determinantu:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\cdot \operatorname{adj} A$$

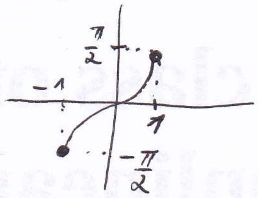
$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} \det M_{11} & -\det M_{12} & \det M_{13} \\ -\det M_{21} & \det M_{22} & -\det M_{23} \\ \det M_{31} & -\det M_{32} & \det M_{33} \end{pmatrix}^T$$

M_{ij} = matice A ve které vynecháme i-tý řádek a j-tý sloupec

2) $y = \arcsin x$ Fce je prostá, tedy k ní existuje inverzní fce.

$Df = \langle -1, 1\rangle$

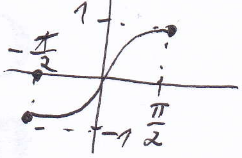
$Hf = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$



f^{-1}: $y = \sin x$

$Df^{-1} = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$

$Hf^{-1} = \langle -1, 1\rangle$



3) $f(x) = \frac{4}{x^2-4}$

$x^2-4 \neq 0$

$x^2 \neq 4$

$x \neq \pm 2$

$Df = R \setminus \{\pm 2\}$

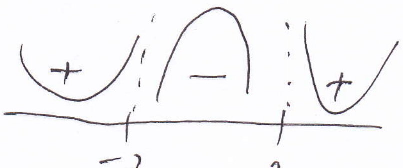
$$f'(x) = \frac{0-4\cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{-8x}{(x^2-4)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-8(x^2-4)^2 + 8x\cdot 2(x^2-4)\cdot 2x}{(x^2-4)^4} = \frac{(x^2-4)\left[-8x^2+32+32x^2\right]}{(x^2-4)^4} = \frac{24x^2+32}{(x^2-4)^3}$$

$$\frac{24x^2+32}{(x^2-4)^3} = 0$$

$24x^2+32 = 0$

$x^2 \neq -\frac{32}{24}$



konvexní $(-\infty, -2), (2, \infty)$

konkávní $(-2, 2)$

4) $f(x) = e^{-x}\cdot\sqrt{2x-3}$

$$f'(x) = -e^{-x}\cdot\sqrt{2x-3} + e^{-x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2x-3}}\cdot 2 = -e^{-x}\sqrt{2x-3} + \frac{e^{-x}}{\sqrt{2x-3}}$$

5)

$f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$

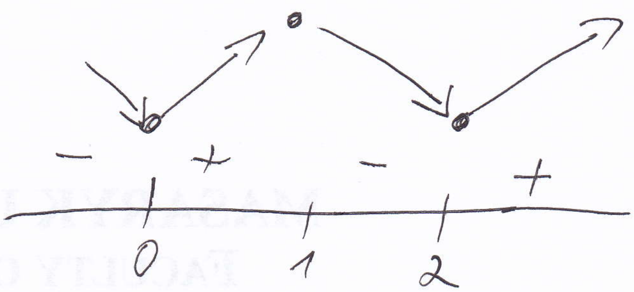
$Df = R$

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x$

$4x(x^2 - 3x + 2) = 0$

$4x(x-2)(x-1) = 0$

$x=0 \quad x=2 \quad x=1$



lokální min $x=0$, $x=2$

lokální max $x=1$

6)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{3} \end{pmatrix} \quad h(A) = 3$$

7)

$AX - 2A = BX - C$

$AX - BX = 2A - C$

$(A-B)\cdot X = 2A - C$

$(A-B)^{-1}(A-B)\cdot X = (A-B)^{-1}\cdot(2A-C)$

$X = (A-B)^{-1}\cdot(2A-C)$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A-B)^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$2A - C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

8)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -2\cdot(0 + 1 + 0 - 0 + 1 - 0) + 1\cdot(-2 + 0 + 2 + 2 - 0 + 2)$$

$$= -4 + 4 = \underline{\underline{0}}$$