

Písemná zkouška MB 1010, 9. ledna 2013

I. část

max: 12 bodů

1. Nakreslete grafy následujících funkcí (do samostatných obrázků)

$$a) f : y = |\sin x| \quad b) g : y = \left(\frac{1}{2}\right)^x.$$

Která funkce je sudá nebo lichá?

2. Najděte inverzní funkci k funkci

$$y = \ln(x - 2).$$

3. Množství dané látky x je v čase t dáno vztahem

$$x(t) = \frac{-2 + 4e^t}{-1 + 2e^t},$$

Kolik bude této látky pro $t \rightarrow \infty$?

4. Určete všechny reálné kořeny polynomu $P(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$.

5. Rozložte funkci

$$y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 4}$$

na polynom a ryze lomenou racionální funkci.

6. Vypočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{1 + \cos 2x}.$$

7. Napište rovnici tečny ke grafu funkce

$$y = \frac{1}{x+1} \quad \text{v bodě } x = 0.$$

Nakreslete obrázek (graf funkce a tečnu)!

8. Pomocí první derivace určete lokální extrémy funkce

$$y = \frac{1}{1+x^2}.$$

9. (2 body) Vypočtěte integrály

$$a) \int \sqrt{2x-5} dx \quad b) \int_0^{\pi} x \cos 2x dx .$$

10. Co to je hodnota matice? Udejte příklad 3×3 matice, která má hodnotu $h = 2$.

11. Rozhodněte a zdůvodněte, zda konverguje nebo diverguje řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}.$$

II. část

max: 12 bodů

1. Vyšetřete průběh funkce a nakreslete její graf

4 b.

$$y = \frac{x}{(x-2)^2} .$$

2. Vypočtěte integrál

$$\int \frac{x^2 - 3x + 2}{x(x+1)^2} dx .$$

3. Vypočtěte obsah obrazce ohraničeného křivkami

2 b.

$$y = 2x^3, \quad y = \frac{2}{x}, \quad x = e \quad \text{a osou } x .$$

Nakreslete obrázek této plochy!

4. Řešte soustavu lineárních rovnic

2 b.

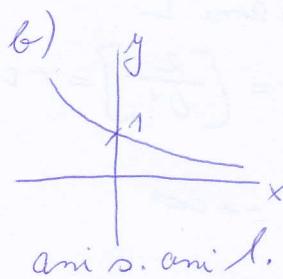
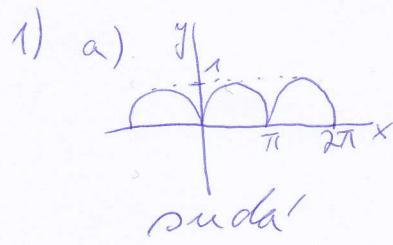
$$\begin{aligned} 2x + 2y + z &= 0 \\ x + 2y &= -1 \\ 3x - y + 4z &= 4 . \end{aligned}$$

5. Nalezněte Lagrangeův interpolační polynom funkce $f(x)$, je-li známo

$$f(-1) = 12, \quad f(0) = 6, \quad f(1) = 0, \quad f(2) = 0 .$$

1 b.

I. část



2) $x = \ln(y-2)$
 $e^x = y-2$
 $\underline{e^x + 2 = y}$

3) $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{-2+4e^k}{-1+2e^k} = \left[\frac{\cos}{\cos} \right] \stackrel{k \rightarrow \infty}{=} \frac{4e^k}{2e^k} = \underline{2}$

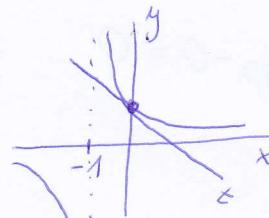
4) $x^3 - 5x^2 + 6x = x(x^2 - 5x + 6)$
 $= x(x-2)(x-3)$
 $\underline{x=0} \quad \underline{x=2} \quad \underline{x=3}$

5) $\frac{(x^2-1):(x^2+4)}{-\frac{(x^2+4)}{-5}} = 1 - \frac{5}{x^2+2}$

6) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{1+\cos 2x} \stackrel{LH}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-\sin 2x \cdot 2} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{LH}{=} \frac{1}{4}$
 $= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{-\cos 2x \cdot 4} = \underline{\frac{1}{4}}$

7) $f' = - (x+1)^{-2} \quad y_0 = \frac{1}{0+1} = 1$
 $f'(0) = -1$

$\therefore y = -1(x-0) + 1$
 $y = -x + 1$



8) $Df = R$
 $f' = -(1+x^2)^{-2} \cdot 2x = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$
 $-2x=0 \quad \xrightarrow[x=0]{+/-} \quad 0 \quad \text{ob. mali. } [0,1]$

9) a) $\int (2x-5)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{(2x-5)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2} \cdot 2} = \frac{\sqrt{(2x-5)^3}}{3} + C$

b) $\int_0^{\pi} x \cos 2x dx = \begin{cases} u=x & u'=1 \\ v=\cos 2x & v'=-\frac{\sin 2x}{2} \end{cases} = \left[\frac{x \sin 2x}{2} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin 2x}{2} dx =$
 $= \left[\frac{x \sin 2x}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos 2x}{2} \right]_0^{\pi} = 0 + \frac{1}{4} - (0 + \frac{1}{4}) = \underline{0}$

10) počet lineárně nezávislých řádků

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

11) integrální pravidlo

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{n^3} dn = \int_1^{\infty} n^{-3} dn = \left[\frac{n^{-2}}{-2} \right]_1^{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2n^2} \right]_1^{\infty} =$$

 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2n^2} \right) + \frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2} = \underline{\frac{1}{2}} \Rightarrow \text{konečnou.}$

II. cast

1) $Df = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ $f(x) = \frac{-x}{(-x-2)^2}$ nem' Sami L

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{(-x-2)^2} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{(-x-2)^2} = \left[\frac{2}{0^+} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{(-x-2)^2} = +\infty$$

$f_x: 0 = \frac{x}{(-x-2)^2} \Rightarrow x=0$

$$f' = \frac{1(x-2)^2 - x \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{(x-2)[x-2-2]}{(x-2)^4} = \frac{-x-2}{(x-2)^3}$$

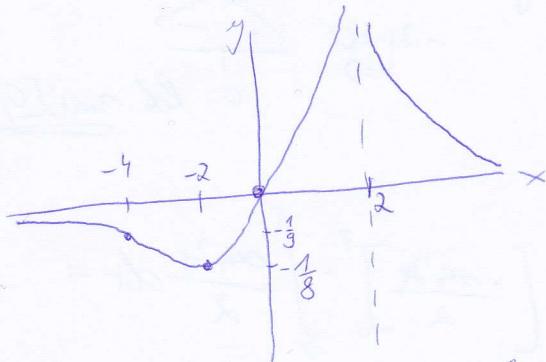
$$f'' = \frac{-1(x-2)^3 - (-x-2)3(x-2)^2}{(x-2)^6} = \frac{(x-2)^2[-x+2+3x+6]}{(x-2)^6} = \frac{2x+8}{(x-2)^4}$$

$-x-2=0$
 $-2=x$
 $\begin{array}{c|ccccc} & - & + & | & - \\ \hline -2 & & & | & & \\ 2 & & & | & & \end{array}$
 lok. min $[2, -\frac{1}{8}]$
 $\begin{array}{c|ccccc} & - & + & | & + \\ \hline -4 & & & | & & \\ 2 & & & | & & \end{array}$
 infl. Bod $[4, -\frac{1}{9}]$

asympt. $x = +2$

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{(-x-2)^2 \cdot x} = 0$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{(-x-2)^2} - 0 = 0 \Rightarrow y = 0$$



$$2) \frac{x^2-3x+2}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

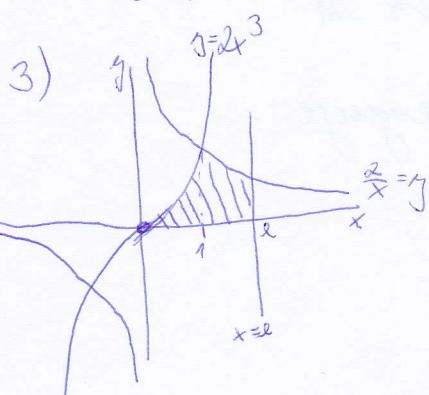
$$x^2-3x+2 = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx$$

$$x^2-3x+2 = Ax^2+2Ax+A + Bx^2+Bx+Cx$$

$$1 = A+B \rightarrow B = -1$$

$$-3 = 2A + B + C \rightarrow C = -6$$

$$2 = A$$



$$\int \frac{2}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{6}{(x+1)^2} dx =$$

$$2 \ln|x| - \ln|x+1| - \frac{6}{x+1} =$$

$$= 2 \ln|x| - \ln|x+1| + \frac{6}{x+1} + C$$

$$3) S = \int_0^1 2x^3 dx + \int_1^2 \frac{2}{x} dx = \left[\frac{2x^4}{4} \right]_0^1 + \left[2 \ln|x| \right]_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2} - 0 + 2 \ln 2 - 2 \ln 1 =$$

$$= \frac{1}{2} + 2 - 0 = \underline{\underline{\frac{5}{2}}}$$

4)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{(1,2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & 4 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{(1,2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} x+2y &= -1 \\ x-2 &= -1 \\ \underline{x = 1} \end{aligned}$$

$$y - \frac{1}{2} \cancel{x} = -1$$

$$\cancel{y = -1}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cancel{x} &= 0 \\ \cancel{x} &= 0 \\ [1, -1, 0] \end{aligned}$$

5)

$$f(-1) = 12 \quad f(0) = 6 \quad f(1) = 0 \quad f(2) = 0$$

$$\begin{aligned} P(x) &= 12 \cdot \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{-1 \cdot (-1-1)(-1-2)} + 6 \cdot \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{1 \cdot (-1)(-2)} + 0 + 0 = \\ &= 12 \cdot \frac{x(x^2-3x+2)}{-1 \cdot (-3) \cdot (-2)} + 6 \cdot \frac{(x^2-1)(x-2)}{2} \\ &= -2 \cdot (x^3 - 3x^2 + 2x) + 3 \cdot (x^3 - 2x^2 - x + 2) = \\ &= \underline{\underline{x^3 - 7x + 6}} \end{aligned}$$