

Písemná zkouška MB 1010, 20. prosince 2011

I. část

max: 12 bodů

Bodování: Příklad 1 za 2 body, ostatní za 1 bod.

1. Nakreslete grafy následujících funkcí (do samostatných obrázků)

$$a) f: y = \ln |x| \quad b) g: y = 2 \arctg x.$$

Má funkce g limitu pro $x \rightarrow \infty$? Pokud ano, určete ji.

2. Určete definiční obor funkce

$$y = \ln \sqrt{x^2 - x - 6}.$$

3. Najděte inverzní funkci k funkci

$$y = 10^{x-3}.$$

4. Vypočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{x}.$$

5. Napište rovnici tečny ke grafu funkce $y = 1 - x^2$ v bodě $x = 0$.

6. Určete intervaly, kde je funkce konvexní: $y = x^3 - 12x + 12$.

7. Vypočtěte integrál

$$\int x e^{3x} dx. \quad \left| \begin{array}{l} u = x \\ u' = 1 \end{array} \right.$$

8. Pomocí vhodné substituce vypočtěte určitý integrál

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x dx.$$

9. Pomocí integrálu vypočtěte objem koule o poloměru r .

10. Určete součet nekonečné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

11. Rozviňte funkci

$$\frac{1}{1+x}$$

do mocninné řady.

Písemná zkouška MB 1010, 20. prosince 2011

II. část

max: 12 bodů

1. Vyšetřete průběh funkce a nakreslete její graf

3 b.

$$y = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

2. Vypočtěte integrál

2 b.

$$\int \frac{3x + 16}{x^2 - x - 6} dx.$$

3. Vypočtěte obsah obrazce ohraničeného parabolami

2 b.

$$y = 4 - x^2 \quad a \quad y = x^2 - 2x.$$

4. Řešte soustavu lineárních rovnic

3 b.

$$x - 2y + z = -2$$

$$2x + y - z = -3$$

$$3x + 2y - z = -2.$$

5. Vypočtěte determinant

2 b.

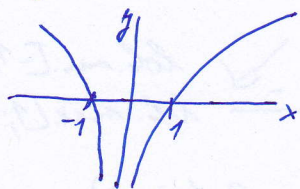
$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix}$$

Bonusový příklad (nepovinný): Rozhodněte, zda nevlastní integrál konverguje

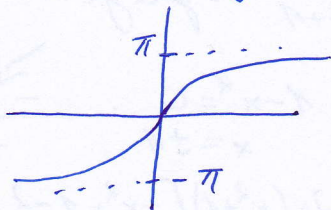
$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} dx.$$

Návod: Pro lichou funkci platí $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

① $y = \ln|x|$



$y = 2 \arctan x$



$\lim_{x \rightarrow \infty} 2 \arctan x = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \underline{\underline{\pi}}$

② $x^2 - x - 6 > 0$
 $(x-3)(x+2) > 0$



$Df = (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$

③ $x = 10^{y-3}$
 $\log x = y - 3$
 $\log x + 3 = y$

④ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{CH}{=} -1$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1-x} \cdot (-1) = \underline{\underline{-1}}$

⑤ $x_0 = 0$
 $f_0 = 1 - 0^2 = 1$
 $f' = -2x \quad f'(0) = 0$
 $y = 1 + 0 \cdot (x-0)$
 $\underline{\underline{y=1}}$

⑥ $y = x^3 - 12x + 12$
 $y' = 3x^2 - 12$
 $y'' = 6x$
 konst. $6x > 0$
 $x > 0$
 $\underline{\underline{x \in (0, +\infty)}}$

⑦ $\int x \cdot e^{3x} dx =$
 $= \left| \begin{matrix} u=x & u'=1 \\ v'=e^{3x} & v=\frac{e^{3x}}{3} \end{matrix} \right| =$
 $= x \cdot \frac{e^{3x}}{3} - \int \frac{e^{3x}}{3} dx =$
 $= \underline{\underline{\frac{x e^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} + C}}$

⑧ $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x dx = \left| \begin{matrix} k = \sin x \\ dk = \cos x dx \\ \frac{dk}{\cos x} = dx \end{matrix} \right| = \int_0^1 k^2 \frac{\cos x dk}{\cos x} = \left[\frac{k^3}{3} \right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$

⑨ $x^2 + y^2 = r^2$
 $y = \sqrt{r^2 - x^2}$
 $V = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}^2 dx = 2\pi \int_0^r r^2 - x^2 dx =$
 $= 2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r = 2\pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right) = \underline{\underline{\frac{4}{3} \pi r^3}}$

⑩ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n$ geom. řada $\Rightarrow q = \frac{1}{2} \Rightarrow s = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \underline{\underline{1}}$

⑪ $\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} \quad \text{geom. ř. } q = -x \Rightarrow \underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n}}$

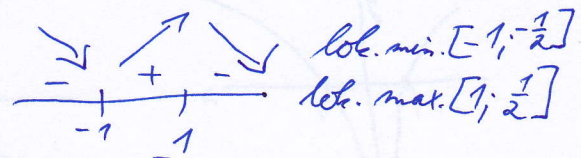
II. isat

① $y = \frac{x}{x^2+1}$ $Df = \mathbb{R}$ $f(-x) = \frac{-x}{x^2+1} \Rightarrow$ fej je licha'

$$y' = \frac{x^2+1-x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$1-x^2=0$$

$$x=\pm 1$$



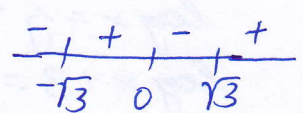
lok. min. $[-1; -\frac{1}{2}]$
lok. max. $[1; \frac{1}{2}]$

$$y'' = \frac{-2x(x^2+1)^2 - (1-x^2) \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{2x(x^2+1)[-x^2-1-2+2x^2]}{(x^2+1)^4} = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

asympt.

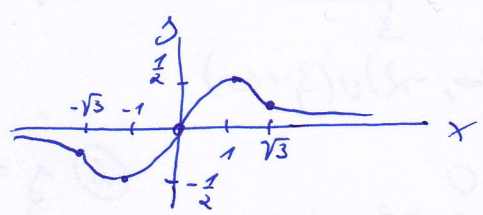
$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{(x^2+1) \cdot x} = 0$$

$$y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2+1} - 0 = 0 \quad \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2+1}} \right\} y=0$$



$$2x(x^2-3)=0$$

$$x=0 \quad x=\pm\sqrt{3}$$



② $\int \frac{3x+16}{x^2-x-6} dx = \int \frac{3x+16}{(x-3)(x+2)} dx$

$$\frac{3x+16}{x^2-x-6} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}$$

$$3x+16 = Ax+2A+Bx-3B$$

$$16 = 2A-3B$$

$$3 = A+B$$

$$10 = -5B$$

$$B=2 \quad A=5$$

$$\begin{aligned} &= \int \frac{5}{x-3} - \frac{2}{x+2} dx = \\ &= 5 \ln|x-3| - 2 \ln|x+2| + C \end{aligned}$$

③ $y = 4-x^2 = (2-x)(2+x)$

$$y = x^2-2x = x(x-2)$$

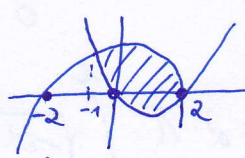
$$4-x^2 = x^2-2x$$

$$0 = 2x^2-2x-4$$

$$0 = x^2-x-2$$

$$(x+1)(x-2)$$

$$x=-1 \quad x=2$$



$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 (4-x^2 - (x^2-2x)) dx &= \int_{-1}^2 (4-2x^2+2x) dx \\ &= \left[4x - \frac{2x^3}{3} + x^2 \right]_{-1}^2 = 8 - \frac{16}{3} + 4 + 4 - \frac{2}{3} - 1 = 9 \end{aligned}$$

④ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2-2R_1 \\ R_3-3R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 8 & -4 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 40 & -24 & 8 \\ 0 & 40 & -20 & 20 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \cdot \frac{1}{5}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 4 & 12 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \cdot \frac{1}{4}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2+3R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1+2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1-R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$

$5y-9=1$
 $y=2$
 $x=2 \cdot 2+3-2=1$

⑤ $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -6 -6 +6 +1 +27 -8 = 14$

Bonus: $\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^0 x \cdot e^{-x^2} dx + \int_0^{\infty} x \cdot e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$ konvergenci

Nebor dle navedenu $\rightarrow \int_a^b f(x) dx = 0$

$f(-x) = -x e^{-x^2}$ tj. fej je licha'

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x \cdot e^{-x^2} dx &= \left| \begin{array}{l} u = -x^2 \\ du = -2x dx \\ \frac{du}{-2x} = dx \end{array} \right| = \int_0^{\infty} x \cdot e^u \cdot \frac{du}{-2x} = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^u du \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t + \frac{1}{2} e^0 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$