A]

1) Načrtněte definiční obor funkce

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-4}$$

2) Určete parciální derivace prvního řádu

$$f(x,y) = e^x \cdot \cos(x-2y)$$

3) Určete normálový vektor tečné roviny k ploše $z^2+xy+2xz+1=0$ v bodě $[2,1,-1]$.

4) Určete body, ve kterých může mít funkce $z=2x^3+xy^2-5x^2+y^2$ lokální extrémy.

5) Vypočítejte neurčitý integrál

$$\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$$

6) Určete, jestli je množina splňující tyto nerovnosti

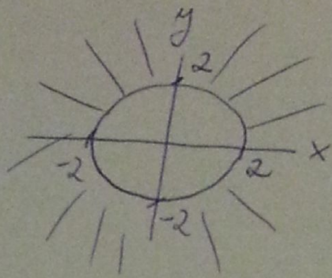
$$1-y \geq 0,$$
$$y \geq x^2-1$$

kompaktní.

A – řešení!

1) $x^2+y^2-4 \geq 0$

$x^2+y^2 \geq 4$



2) $f'_x = e^x \cdot \cos(x-2y) + e^x \cdot (-\sin(x-2y)) \cdot 1$

$= e^x \cdot \cos(x-2y) - e^x \sin(x-2y)$

$f'_y = -e^x \sin(x-2y) \cdot (-2) = 2e^x \sin(x-2y)$

3) je to implicitní funkce, normálový vektor

(F'_x, F'_y, F'_z) nebo $(f'_x, f'_y, -1)$

$F'_x = y+2z \qquad F'_x(T) = 1-2 = -1$

$F'_y = x \qquad F'_y(T) = 2$

$F'_z = 2z+2x \qquad F'_z(T) = -2+2\cdot 2 = 2$

Tedy $(-1, 2, 2)$

druhá možnost:

$f'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$

$f'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{2}{2} = -1$

$\left(\frac{1}{2}, -1, -1\right)$

4) $z'_x = 6x^2+y^2-10x$

$z'_y = 2xy + 2y$

$6x^2+y^2-10x = 0 \Rightarrow y = 0$

$6x^2 - 10x = 0$

$x(6x-10) = 0$

$x = 0 \quad x = \frac{5}{3}$

$2xy + 2y = 0$

$2y(x+1) = 0$

$y = 0 \qquad x = -1$

$x = -1$

$6 + y^2 + 10 = 0$

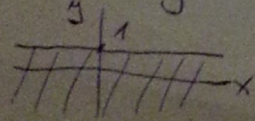
$y^2 \cancel{=} -16$

podezřelé body $[0,0]$; $\left[\frac{5}{3}, 0\right]$

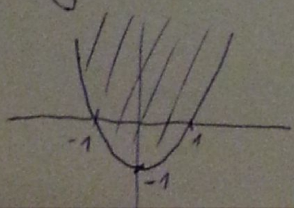
5) $\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx = \left| \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x}dx \end{array} \right| = \int t^2\,dt = \frac{t^3}{3} = \frac{\ln^3 x}{3} + C$

6) $1-y \geq 0$

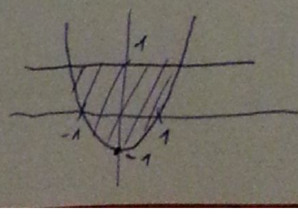
$1 \geq y$



$y \geq x^2 - 1$



TEDY:



je uzavřená i omezená $\Rightarrow$ je kompaktní!

B

1) Načrtněte definiční obor

$$f(x,y) = \ln x - \sqrt{y+3}$$

2) Určete f''_{xy}, kde $f(x,y) = \dfrac{xy}{2x-1}$

3) Určete rovnici normály funkce

$x^2 - y^2 + z^2 - 6 = 0$ v bodě $[1,2,-3]$.

4) Určete lokální extrémy funkce

$z = xy - x^2 - y^2 + x + y$

5) Vypočítejte neurčitý integrál

$$\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{x}{2} + \frac{3}{x} - \frac{1}{e^{-x}} \right) dx$$

6) Vypočítejte neurčitý integrál

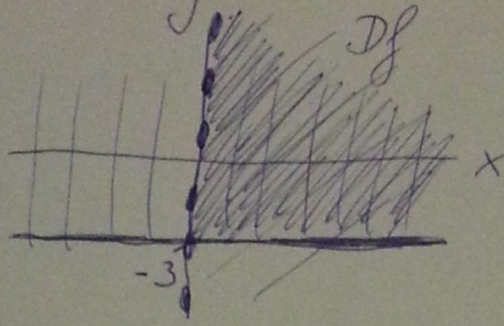
$$\int \cos 3x \, dx$$

B - řešení

1) $x > 0$

$y + 3 \geq 0$

$y \geq -3$



2) $f = \frac{xy}{2x-1}$

$$f'_x = \frac{y\cdot(2x-1) - xy\cdot 2}{(2x-1)^2} = \frac{2xy - y - 2xy}{(2x-1)^2} = \frac{-y}{(2x-1)^2} = \frac{-1}{(2x-1)^2}\cdot y$$

$$f''_{xy} = \frac{-1}{(2x-1)^2}$$

3) jedná se o implicitní fci, tedy

$F'_x = 2x$ $\quad F'_x(T) = 2$

$F'_y = -2y$ $\quad F'_y(T) = -4$

$F'_z = 2z$ $\quad F'_z(T) = -6$

$$n: \begin{aligned} x &= 1 + 2t \\ y &= 2 - 4t \\ z &= -3 - 6t \end{aligned}$$

4) $z'_x = y - 2x + 1$

$z'_y = x - 2y + 1$

$y - 2x + 1 = 0 \longrightarrow y = 2x - 1$

$x - 2y + 1 = 0$

$x - 2(2x-1) + 1 = 0$

$x - 4x + 2 + 1 = 0$

$-3x = -3$

$x = 1 \quad y = 2 - 1 = 1 \qquad [1, 1]$

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3$$

$f''_{xx} < 0$

lok. MAX [1, 1]

5) $$\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{x}{2} + \frac{3}{x} - \frac{1}{e^{-x}}\right)dx = \int\left(x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x + 3\cdot\frac{1}{x} - e^x\right)dx = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + 3\ln|x| - e^x + c = 2\sqrt{x} - \frac{1}{4}x^2 + 3\ln|x| - e^x + c$$

6) $$\int \cos 3x \, dx = \begin{vmatrix} t = 3x \\ dt = 3dx \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\int 3\cdot\cos 3x \, dx = \frac{1}{3}\int \cos t \, dt =$$

$$= \frac{1}{3}\sin t = \frac{1}{3}\sin 3x + c$$

C

1) Načrtněte definiční obor funkce

$$f(x,y) = \arcsin(x-2) + \sqrt{y}$$

2) Určete f''_{xy} v bodě [1;2]

$$f(x,y) = \cos(2x - xy) + \cos\frac{\pi}{4}$$

3) Napište rovnici normály funkce $z = x^2 - 2xy + 2y^2$ v bodě [2; 3].

4) Určete body, ve kterých může mít funkce $f(x,y) = x^3 + y^3$ lokální vázané extrémy na množině $x + y - 3 = 0$.

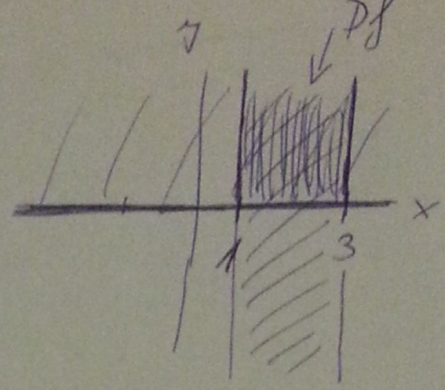
5) Vypočítejte neurčitý integrál

$$\int \frac{(1+\sqrt{x})^2}{3x}\,dx$$

6) Určete ~~první~~ parciální derivace 1. řádu funkce:

$$ye^z - x \ln y + z^2 - 2xy = 0$$

C - řešení



1) $-1 \le x-2 \le 1 \qquad y \ge 0$

$1 \le x \le 3$

2) $f = \cos(2x - xy) + \cos\frac{\pi}{4}$

$f'_x = -\sin(2x-xy)\cdot(2-y)$

$f''_{xy} = -\cos(2x-xy)\cdot(-x)\cdot(2-y) - \sin(2x-xy)\cdot(-1)$

$f''_{xy}(1,2) = -\cos(2-2)\cdot(-1)\cdot(2-2) - \sin(2-2)\cdot(-1) =$

$= -\cos 0 \cdot (-1)\cdot 0 - \sin 0 \cdot (-1) = \underline{\underline{0}}$

3) normálový vektor použiji $(f'_x, f'_y, -1)$

$f'_x = 2x - 2y \qquad f'_x(T) = 4-6 = -2 \qquad n: x = 2 - 2t$

$f'_y = -2x + 4y \qquad f'_y(T) = -4+12 = 8 \qquad y = 3 + 8t$

$\underline{\underline{z = 10 - t}}$

$z_0 = 2^2 - 2\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3^2 = 4 - 12 + 18 = 10$

4) dosazovací metoda → lze vyjádřit neznámou z podmínky

$x + y - 3 = 0$

$y = 3 - x$

$h = x^3 + (3-x)^3$

$h' = 3x^2 + 3(3-x)^2\cdot(-1)$

$3x^2 - 3(3-x)^2 = 0$

$3x^2 - 3(9 - 6x + x^2) = 0 \quad /:3$

$x^2 - 9 + 6x - x^2 = 0$

$6x = 9$

$x = \frac{3}{2} \qquad y = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

podezřelý bod je $[\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$

5) $\int \frac{(1+\sqrt{x})^2}{3x}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1+2\sqrt{x}+x}{x}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x} + 2x^{-\frac{1}{2}} + 1\, dx =$

$= \frac{1}{3}\left(\ln|x| + \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + x\right) = \frac{1}{3}(\ln|x| + 4\sqrt{x} + x) + C$

6) $f'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{-\ln y - 2y}{ye^z + 2z} = \frac{\ln y + 2y}{ye^z + 2z}$

$f'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{e^z - \frac{x}{y} - 2x}{ye^z + 2z} = \frac{-e^z + \frac{x}{y} + 2x}{ye^z + 2z}$

$\boxed{D}$

1) Načrtněte definiční obor funkce

$$f(x,y) = \ln(y-x+1) + \arccos\left(\frac{x}{2}\right)$$

2) Určete všechny parciální derivace druhého řádu funkce $f(x,y) = x + e^{x^2-2y}$

3) Napište rovnici tečné roviny funkce $z = 3x^2 + 2y^2 + x + y$ v bodě $A[-1;2]$.

4) Určete body, ve kterých může mít funkce $f(x,y) = 2xy$ vázané extrémy na množině $x^2+y^2=2$.

5) Vypočítejte neurčitý integrál

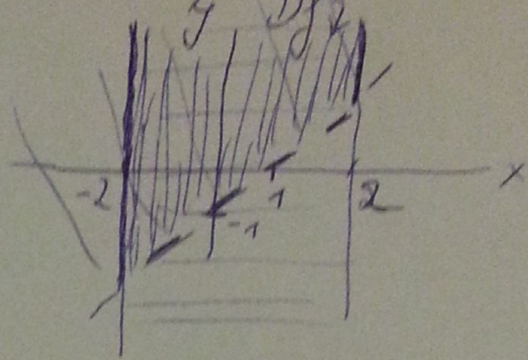
$$\int (3x-1)\cdot e^x \, dx$$

6) Určete obě parciální derivace prvního řádu funkce $x + y^2 + z^2 - e^z = 0$ v bodě $[2,-1,0]$.

D – řešení

1) $y - x + 1 > 0 \qquad -1 \leq \frac{x}{2} \leq 1$

$y > x - 1 \qquad -2 \leq x \leq 2$



2) $f'_x = 1 + e^{x^2-2y} \cdot 2x$

$f'_y = e^{x^2-2y} \cdot (-2)$

$f''_{xx} = e^{x^2-2y} \cdot 2x \cdot 2x + e^{x^2-2y} \cdot 2$

$f''_{xy} = e^{x^2-2y} \cdot (-2) \cdot 2x = f''_{yx}$

$f''_{yy} = e^{x^2-2y} \cdot (-2) \cdot (-2)$

3) $z_0 = 3 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot 2^2 + (-1) + 2 = 3 + 8 + 1 = 12$

$f'_x = 6x + 1 \qquad f'_x(T) = -5 \qquad \rho: z = -5(x+1) + 3(y-2) + 12$

$f'_y = 4y + 1 \qquad f'_y(T) = 9 \qquad z = -5x + 3y + 1$

4) určíme pomocí Jakobiánu

$\begin{vmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 0 \qquad 4y^2 - 4x^2 = 0 \qquad y^2 = x^2 \qquad y = \pm x \nearrow \qquad x^2 + y^2 = 2 \qquad x^2 + x^2 = 2 \qquad x^2 = 1 \qquad x = \pm 1$

$[1;1]$
$[1,-1]$
$[-1,1]$
$[-1,-1]$

5) $\int (3x-1) \cdot e^x dx = \begin{vmatrix} u = 3x-1 & v' = e^x \\ u' = 3 & v = e^x \end{vmatrix} =$

$= (3x-1)e^x - \int 3e^x dx = \underline{\underline{(3x-1)e^x - 3e^x + c}}$

6) $f'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{1}{2z - e^z} \qquad f'_x(2,-1,0) = \frac{-1}{0 - e^0} = \underline{\underline{1}}$

$f'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{2y}{2z - e^z} \qquad f'_y(2,-1,0) = +\frac{2}{0 - e^0} = \underline{\underline{-2}}$