

Vypočítejte derivace $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ v obecném bodě pro implicitně zadané funkce.

- a) $\sin xy + \sin yz + \sin zx = 1$,
- b) $z = xy \sin zx$,
- c) $z + e^z = xy + 1$,
- d) $\arctg x + \arctg y + \arctg z = 5$.

Řešení:

a) $\frac{y \cos xy + z \cos xz}{x \cos xz + y \cos yz}$, $-\frac{x \cos xy + z \cos yz}{x \cos xz + y \cos yz}$,
 b) $\frac{y \sin zx + xy z \cos zx}{1 - x^2 y \cos zx}$, c) $y/(e^z + 1)$, $x/(e^z + 1)$, d) $-\frac{1+z^2}{1+x^2}$, $-\frac{1+z^2}{1+y^2}$.

Nalezněte tečnou rovinu k dané ploše.

- a) $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ v bodě $(1, -2, 3)$,
- b) $xy + yz + zx = -1$ v bodě $(?, 2, -1)$,
- c) $x + y + z = e^{-(x+y+z)+1}$ v bodě $(1, ?, -1)$.

Řešení:

a) $x - 2y + 3z = 14$, b) $x + 3z + 2 = 0$, c) $x + y + z = 1$.

Nalezněte rovnici tečné roviny a normály v bodě $[1;-2;4]$ ke grafu implicitní funkce:

$$x^2 + 3y^2 - 4z^2 + 2x - 12y + 8z - 7 = 0.$$

Řešení: t: $x - 6y - 6z + 11 = 0$, n: $x=1+t, y=-2-6t, z=4-6t$.

9. Nalezněte rovnici tečné roviny ke grafu funkce z zadané implicitně rovnicí $\sqrt{xy} - z + \ln(x^2 + y^2) = 0$ v bodě $[2, 2, ?]$.

10. Nalezněte rovnici tečné roviny ke grafu funkce z zadané implicitně rovnicí $\ln(\cos(x^2 + y^2 + z^2)) = 5x + 3yz + 6z$ v bodě $A = [0, 0, 0]$.

Řešení:

9. $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{y}{2\sqrt{xy}} + \frac{2x}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{x}{2\sqrt{xy}} + \frac{2y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial F}{\partial z} = -1$, $\frac{\partial F}{\partial x}(A) = 1$, $\frac{\partial F}{\partial y}(A) = 1$,
 $\frac{\partial F}{\partial z}(A) = -1$, $z(2, 2) = 2 + \ln 8 = 2 + 3 \ln 2$, $\tau : x + y - z - 2 + 3 \ln 2 = 0$.
10. $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{-2x \sin(x^2+y^2+z^2)}{\cos(x^2+y^2+z^2)} - 5$, $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{-2y \sin(x^2+y^2+z^2)}{\cos(x^2+y^2+z^2)} - 3z$,
 $\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{-2z \sin(x^2+y^2+z^2)}{\cos(x^2+y^2+z^2)} - 3y - 6$, $\frac{\partial F}{\partial x}(A) = -5$, $\frac{\partial F}{\partial y}(A) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial z}(A) = -6$, $\tau : 5x + 6z = 0$.
-

VYBERTE SPRÁVNOU ODPOVĚĎ:

5. Vypočtete parciální derivace implicitní funkce z dané rovnicí

$$\ln(x^2y^3 + z^4) = 3.$$

- a) $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{xy^3}{2z^3}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3x^2y^2}{4z^3}$
b) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\ln(2xy^3)}{\ln(4z^3)}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\ln(3x^2y^2)}{\ln(4z^3)}$
c) $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{xy^3 - 3}{2z^3}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3x^2y^2 - 3}{2z^3}$
d) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2xy^3 - z^4}{x^2y^3 + z^3}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-3x^2y^2 - y^4}{x^2y^3 + z^3}$

6. Vypočtete parciální derivace implicitní funkce z dané rovnicí

$$\arctan(x+y) + \arctan(y+z) = x+y+z.$$

- a) $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{(x+y)^2(1+(y+z)^2)}{(y+z)^2(1+(x+y)^2)}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1-(x+y)^2(y+z)^2}{(y+z)^2(1+(x+y)^2)}$
b) $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{(x+y)^2(1+(y+z)^2)}{(y+z)^2(1+(x+y)^2)}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1-(x+y)^2(y+z)^2}{(y+z)^2(1+(x+y)^2)}$
c) $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{(x+y)^2}{(y+z)^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{(x+y)^2+(y+z)^2}{(y+z)^2}$
d) $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1+(y+z)^2}{1+(x+y)^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2+(x+y)^2+(y+z)^2}{(1+(x+y)^2)(1+(y+z)^2)}$

7. Vypočtete parciální derivace implicitní funkce z v bodě $A = [3, 0, -2]$ dané

$$\text{rovnicí } x^2yz^3 + z^4 = x^3y^3.$$

- a) $\frac{\partial z}{\partial x}(A) = \frac{9}{32}$, $\frac{\partial z}{\partial y}(A) = -\frac{3}{2}$ b) $\frac{\partial z}{\partial x}(A) = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y}(A) = -\frac{9}{4}$
c) $\frac{\partial z}{\partial x}(A) = \frac{3}{2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}(A) = 0$ d) $\frac{\partial z}{\partial x}(A) = \frac{9}{4}$, $\frac{\partial z}{\partial y}(A) = -\frac{9}{32}$

9. Nalezněte rovnici tečné roviny ke grafu funkce z v bodě $[2, 1, ?]$ zadané implicitně rovnicí $x + y - xz + yz = 0$.

- a) $\tau : 2x - 4y - z - 3 = 0$ b) $\tau : -4x + 2y - z + 3 = 0$
c) $\tau : 4x - 2y - z - 3 = 0$ d) $\tau : -2x + 4y - z + 3 = 0$.

10. Nalezněte rovnici tečné roviny ke grafu funkce z v bodě $[-1, 3, 2]$ zadané implicitně rovnicí $\ln(xy + z^2) = 2$.

- a) $\tau : 4x - y - z + 9 = 0$ b) $\tau : 3x - y + 4z - 2 = 0$
c) $\tau : 2x + y - 4z + 7 = 0$ d) $\tau : x + y + z - 4 = 0$

Řešení: 5) a, 6) a, 7) b, 9) d, 10) b