

Zkouška je písemná, obsahuje 4 příklady doplněné teoretickými otázkami na látku z celého semestru. Je třeba mít znalosti nejen ze cvičení, ale i z tutoriálu. Každý příklad spolu s teoretickou otázkou má hodnotu deseti bodů (početní část 6 bodů, teorie 4 body). Ke splnění zkoušky je třeba dosáhnout minimálně 13 bodů z početní části a 7 bodů z teorie. Hodnocení je pak dále:

20-24 E, 25-28 D, 29-32 C, 33-36 B, 37-40 A

Je povoleno použít kalkulačku.

Zkoušková písemka – ukázka A

1)

- Určete všechny parciální derivace druhého řádu funkce $g(x, y) = e^{2x^2 + \cos y}$.
- Vysvětlete, co je to tečná rovina, a napište obecně rovnici tečné roviny funkce f v bodě $T[x_0, y_0, z_0]$.

2)

- Určete lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^3 + y^3 + 6x^2 - 36x - 12y$.
- Jaké znáte metody na výpočet vázaných extrémů a kdy se která použije?

3)

- Vypočtete obsah plochy mezi grafy funkce $f(x) = 3 - x^2$ a funkce $g(x) = 1 - x$.
- Vysvětlete pojem „primitivní funkce“.

4)

- Najděte obecné řešení diferenciální rovnice: $y'' - 6y' + 5y = 3e^x$.
- Popište obecně, jak se vyřeší lineární diferenciální rovnice prvního řádu s konstantními koeficienty a nulovou pravou stranou.

Zkoušková písemka – ukázka B

1)

- Napište rovnici normály funkce $f(x, y) = x^2y - \sqrt{y} \cdot e^{x-3y}$ v bodě $T[3, 1, ?]$.
- Vysvětlete, co je to „uzavřená množina“, a uveďte příklad (náčrtek) takové množiny.

2)

- Určete vázané extrémy funkce $f(x, y) = 2(x + e^{y-1}) - y - 3$ na množině $g: y + 2x - 1 = 0$.
- Co je to Jacobiho determinant (Jakobián) a k čemu se používá?

3)

- Vypočtete neurčitý integrál $\int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$.
- Vysvětlete metodu „per partes“ a uveďte příklad.

4)

- Najděte obecné řešení diferenciální rovnice: $y' + y \cdot \cot x = 0$.
- Napište, jak vypadá řešení lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty a nulovou pravou stranou, jejíž determinant charakteristické rovnice je záporný.

Na další straně najdete řešení početní části ukázkových písemek. Odpovědi na teoretické otázky jste slyšeli na tutoriálu či cvičení nebo najdete ve skriptech. Při odpovídání na teoretické otázky se nesnažte být nejstručnější, ale naopak se to vždy snažte popsat tak, jako byste to vysvětlovali někomu, kdo o tom nikdy neslyšel!

(A)

$$1) f = e^{2x^2 + \cos y}$$

$$f'_x = e^{2x^2 + \cos y} \cdot 4x$$

$$f'_y = e^{2x^2 + \cos y} \cdot (-\sin y)$$

} derivative
proměna
řádku

$$f''_{xx} = e^{2x^2 + \cos y} \cdot 4x \cdot 4x + e^{2x^2 + \cos y} \cdot 4$$

$$= 16x^2 \cdot e^{2x^2 + \cos y} + 4e^{2x^2 + \cos y}$$

$$f''_{xy} = e^{2x^2 + \cos y} \cdot (-\sin y) \cdot 4x = f''_{yx}$$

$$f''_{yy} = e^{2x^2 + \cos y} \cdot (-\sin y) \cdot (-\cos y) + e^{2x^2 + \cos y} \cdot (-\cos y) =$$

$$= \sin^2 y \cdot e^{2x^2 + \cos y} - \cos y \cdot e^{2x^2 + \cos y}$$

$$2) f = x^3 + y^3 + 6x^2 - 36x - 12y$$

$$f'_x = 3x^2 + 12x - 36 \rightarrow 3x^2 + 12x - 36 = 0$$

$$f'_y = 3y^2 - 12 \rightarrow x^2 + 4x - 12 = 0$$

$$3y^2 - 12 = 0 \quad (x+6)(x-2) = 0$$

$$y^2 = 4 \quad x = -6 \quad x = 2$$

$$y = \pm 2$$

$$A[-6; 2]$$

$$B[-6; -2]$$

$$C[2; 2]$$

$$D[2; -2]$$

$$A: D_2 = \begin{vmatrix} -24 & 0 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} < 0 \text{ sedlo}$$

$$B: D_2 = \begin{vmatrix} -24 & 0 \\ 0 & -12 \end{vmatrix} > 0 \text{ lok. max}$$

$$C: D_2 = \begin{vmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} > 0 \text{ lok. min}$$

$$D: D_2 = \begin{vmatrix} 24 & 0 \\ 0 & -12 \end{vmatrix} < 0 \text{ sedlo}$$

fj parabola
gji pñinka 

$$3) \begin{cases} f(x) = 3 - x^2 \\ g(x) = 1 - x \end{cases} \text{ pñiseñby:}$$

$$3 - x^2 = 1 - x$$

$$0 = x^2 - x - 2$$

$$0 = (x - 2)(x + 1)$$

$$x = 2 \quad x = -1$$

$$S = \int_{-1}^2 3 - x^2 - (1 - x) dx =$$

$$= \int_{-1}^2 2 - x^2 + x dx = \left[2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^2 =$$

$$= 4 - \frac{8}{3} + 2 - \left(-2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = 6 - \frac{8}{3} + 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{9}{2}}}$$

$$4) y'' - 6y' + 5y = 3e^x$$

$$\text{I. } y'' - 6y' + 5y = 0$$

$$r^2 - 6r + 5 = 0$$

$$(r - 5)(r - 1) = 0$$

$$r = 5 \quad r = 1$$

$$y = c_1 e^{5x} + c_2 e^x$$

$$\text{II. odhad } y = a \cdot e^x \cdot x$$

$$y' = a e^x \cdot x + a e^x \cdot 1$$

$$y'' = a e^x \cdot x + a e^x \cdot 1 + a e^x =$$

$$= a e^x \cdot x + 2a e^x$$

dosadíme radahní

$$a e^x \cdot x + 2a e^x - 6(a e^x \cdot x + a e^x)$$

$$+ 5 \cdot a e^x \cdot x = 3e^x$$

/: e^x

$$ax + 2a - 6(ax + a) + 5ax = 3$$

$$\underline{ax} + 2a - \underline{6ax} - 6a + \underline{5ax} = 3$$

$$-4a = 3$$

$$a = -\frac{3}{4}$$

$$\text{odhad } y = -\frac{3}{4} e^x \cdot x$$

III. vñsemí:

$$y = c_1 e^{5x} + c_2 e^x - \frac{3}{4} e^x \cdot x$$

(B)

$$1) f = x^2 y - \sqrt{y} \cdot e^{x-3y}$$

$$T[3, 1, ?]$$

$$f'_x = 2xy - \sqrt{y} \cdot e^{x-3y}$$

$$\begin{cases} x_0 = 3 \\ y_0 = 1 \\ z_0 = 3^2 \cdot 1 - \sqrt{1} \cdot e^{3-3} = 8 \end{cases}$$

$$f'_y = x^2 - \left(\frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot e^{x-3y} + \sqrt{y} \cdot e^{x-3y} (-3) \right)$$

$$f'_x(T) = 2 \cdot 3 \cdot 1 - \sqrt{1} \cdot e^{3-3} = 6 - 1 = 5$$

$$f'_y(T) = 9 - \left(\frac{1}{2} \cdot e^{3-3} + \sqrt{1} \cdot e^{3-3} (-3) \right) = 9 - \left(\frac{1}{2} - 3 \right) = \frac{23}{2}$$

normala: $x = 3 + 5t$
 $y = 1 + \frac{23}{2}t$
 $z = 8 - t$

$$2) f = 2(x + e^{y-1}) - y - 3$$

$$g: \begin{cases} y + 2x - 1 = 0 \\ y = 1 - 2x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} h(x) &= 2 \cdot (x + e^{1-2x-1}) - (1-2x) - 3 \\ &= 2x + 2e^{-2x} - 1 + 2x - 3 \\ &= 4x + 2e^{-2x} - 4 \end{aligned}$$

$$h'(x) = 4 + 2e^{-2x} \cdot (-2) = 4 - 4e^{-2x}$$

$$4 - 4e^{-2x} = 0$$

$$4 = 4e^{-2x}$$

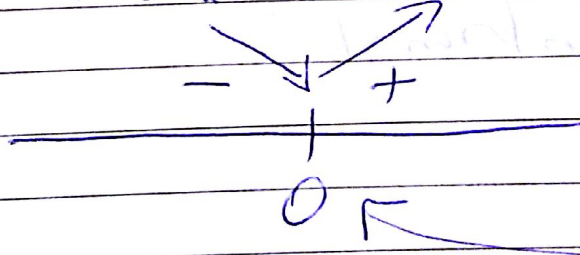
$$1 = e^{-2x}$$

$$e^0 = e^{-2x}$$

$$0 = -2x$$

$$0 = x$$

monotonie derivate



valoare min $[0, 1]$

$$y = 1 - 2x = 1 - 2 \cdot 0 = 1$$

$$\begin{aligned}
 3) \int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{25(1-\frac{x^2}{25})}} = \\
 &= \int \frac{1}{5\sqrt{1-(\frac{x}{5})^2}} dx = \int \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{5})^2}} dx = \left| t = \frac{x}{5} \right. \\
 &\quad \left. dt = \frac{1}{5} dx \right| \\
 &= \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \arcsin t = \underline{\underline{\arcsin \frac{x}{5} + C}}
 \end{aligned}$$

$$4) y' + y \cdot \cot x = 0 \quad (\text{separatelnähe})$$

$$y' = -y \cdot \cot x$$

$$\frac{dy}{dx} = -y \cdot \cot x \quad | : dx$$

$$dy = -y \cot x \cdot dx \quad | : y$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int -\cot x \cdot dx$$

$$\ln|y| = -\int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

$$\ln|y| = -\ln|\sin x| + C$$

$$\ln|y| = -\ln|\sin x| + \ln|C|$$

$$\ln|y| = \ln|C| - \ln|\sin x|$$

$$\ln|y| = \ln\left|\frac{C}{\sin x}\right|$$

$$\underline{\underline{y = \frac{C}{\sin x}}}$$