A

1) Načrtněte definiční obor funkce

$$f(x) = \sqrt{x^2+y^2-9} + \arccos(x+1)$$

2) Určete rovnici normály k funkci $z = \frac{xy}{x-2y}$ v bodě $T[3;1]$.

3) Najděte lokální extrémy funkce $z = x^3+y^3-3xy$

4) Vypočítejte neurčitý integrál $\int x \cdot 2^x \, dx$

B

1) Načrtněte definiční obor funkce

$$f(x) = \log\left(4 - x^2 - \frac{y^2}{4}\right) - \sqrt{y-x+2}$$

2) Určete rovnici tečné roviny k funkci $f(x,y) = 3x^2+2y^2+x+y$ v bodě $T[-1;2]$.

3) Určete vázané extrémy funkce $f(x,y) = xy+y-x-1$ s podmínkou $x+y=1$.

4) Vypočítejte neurčitý integrál $\int \frac{3e^x}{2e^x-1} \, dx$

C

1) Určete všechny parciální derivace prvního řádu funkce

$$f(x,y) = \sqrt{y} \cdot \operatorname{arctg} x^2 + 2xy^2 - x e^{x-2y}$$

2) Napište rovnici tečné roviny k funkci $f(x,y) = e^x \cdot \cos y$ v bodě $T[0,0]$

3) Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = \frac{x^2}{2} - xy - x + y$$

4) Vypočítejte neurčitý integrál $\int \sqrt{x}(\sqrt[3]{x} - 2)\,dx$

D

1) Načrtněte definiční obor

$$f(x,y) = \arcsin\frac{x-3}{2} - \sqrt{y + x^2 - 1}$$

2) Určete všechny parciální derivace druhého řádu

$$f(x,y) = x^2 \cdot \cos(3y) - y \cdot \ln x$$

3) Určete extrémy funkce $f(x,y) = -8x + 6y - 5$ s vazební podmínkou $x^2 + y^2 = 100$.

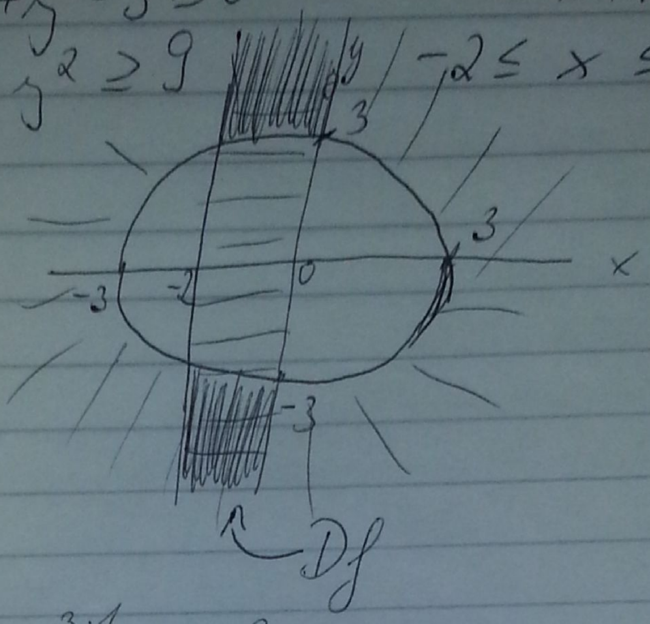
4) Vypočítejte neurčitý integrál:

$$\int x \cdot \ln x \, dx$$

Řešení A:

1) $x^2+y^2-9 \geq 0$ $\qquad -1 \leq x+1 \leq 1$

$x^2+y^2 \geq 9$ $\qquad -2 \leq x \leq 0$



2) $x_0=3 \quad y_0=1 \quad z_0=\frac{3\cdot 1}{3-2\cdot 1}=\frac{3}{1}=3$

$$f'_x=\frac{y(x-2y)-xy\cdot 1}{(x-2y)^2}=\frac{-2y^2}{(x-2y)^2} \qquad f'_x(T)=\frac{-2\cdot 1}{(3-2)^2}=-2$$

$$f'_y=\frac{x(x-2y)-xy\cdot(-2)}{(x-2y)^2}=\frac{x^2}{(x-2y)^2} \qquad f'_y(T)=\frac{9}{(3-2)^2}=9$$

n: $x = 3-2t$

$y = 1+9t$

$z = 3-t$

③ $z'_x=3x^2-3y$

$z'_y=3y^2-3x$

$3x^2-3y=0 \qquad 3y^2-3x=0$

$x^2-y=0 \qquad 3\cdot(x^2)^2-3x=0$

$x^2=y \qquad x^4-x=0$

$x(x^3-1)=0$

$x=0 \quad x=1$

$A[0;0]\ B[1;1]$

$\begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$ $\quad A: \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}=0-9<0$ sedlo

$B: \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}=36-9>0$ lok. MIN

④ $\int x\cdot 2^x\,dx=\begin{vmatrix} u=x & v'=2^x \\ u'=1 & v=\frac{2^x}{\ln 2} \end{vmatrix}$

$=\frac{x\cdot 2^x}{\ln 2}-\int\frac{2^x}{\ln 2}\,dx=$

$=\frac{x\cdot 2^x}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 2}\int 2^x\,dx=$

$=\frac{x\cdot 2^x}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{2^x}{\ln 2}=$

$=\frac{x\cdot 2^x}{\ln 2}-\frac{2^x}{\ln^2 2}+C$

Řešení B:

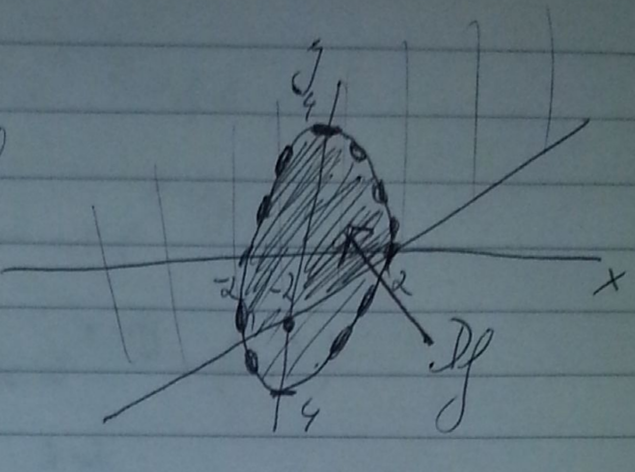
1) $4 - x^2 - \frac{y^2}{4} > 0$ $\qquad$ $y - x + 2 \geq 0$

$4 > x^2 + \frac{y^2}{4}$ $\quad /:4$ $\qquad$ $y \geq x - 2$

$1 > \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16}$ $\qquad$ přímka

$x = 0 \to y = -2$

elipsa $\qquad$ $y = 0 \to x = 2$



2) $x_0 = -1 \quad y_0 = 2 \quad z_0 = 3\cdot(-1)^2 + 2\cdot 2^2 + (-1) + 2 = 3 + 8 - 1 + 2 = 12$

$f'_x = 6x + 1 \qquad f'_x(T) = -6 + 1 = -5$

$f'_y = 4y + 1 \qquad f'_y(T) = 8 + 1 = 9$

$\tau: z = -5(x+1) + 9(y-2) + 12$

$z = -5x + 9y - 11$

3) dosazovací metoda $\quad x + y = 1 \Rightarrow x = 1 - y$

$f(x,y) = yx + y - x - 1$

$h(y) = y\cdot(1-y) + y - (1-y) - 1 = y - y^2 + y - 1 + y - 1 = 3y - y^2 - 2$

$h'(y) = 3 - 2y$

$3 - 2y = 0$ $\qquad$ $+ \quad | \quad -$

$y = \frac{3}{2}$ $\qquad$ $\frac{3}{2}$ $\qquad$ $x = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$

váz. MAX $\left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$

4) $\int \frac{3e^x}{2e^x - 1}\,dx = 3\cdot\int \frac{e^x}{2e^x - 1}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2e^x}{2e^x - 1}\,dx = \underline{\underline{\frac{3}{2}\ln|2e^x - 1| + c}}$

neboť $\int \frac{f'}{f} = \ln|f|$

Řešení C:

1) $f'_x = \sqrt{y} \cdot \frac{1}{1+(x^2)^2} \cdot 2x + 2y^2 - (e^{x-2y} + x e^{x-2y})$

$= \frac{2x\sqrt{y}}{1+x^4} + 2y^2 - e^{x-2y} - x e^{x-2y}$

$f'_y = \frac{1}{2\sqrt{y}} \operatorname{arctg} x^2 + 2x \cdot 2y - x e^{x-2y} \cdot (-2)$

$= \frac{\operatorname{arctg} x^2}{2\sqrt{y}} + 4xy + 2x e^{x-2y}$

2) $x_0 = 0 \quad y_0 = 0 \quad z_0 = e^0 \cdot \cos 0 = 1 \cdot 1 = 1$

$f'_x = e^x \cos y \qquad f'_x(T) = 1$

$f'_y = e^x \cdot (-\sin y) \qquad f'_y(T) = 1 \cdot 0 = 0$

$\tau: \; z = 1(x-0) + 0 \cdot (y-0) + 1$

$z = x + 1$

3) $z = \frac{x^2}{2} - xy - x + y$

$z'_x = x - y - 1$

$z'_y = -x + 1$

$x - y - 1 = 0$

$-x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$1 - y - 1 = 0$

$y = 0 \qquad [1;0]$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 < 0$ sedlo

Funkce nemá lok. extrémy.

4) $\int \sqrt{x}(\sqrt[3]{x} - 2)\,dx =$

$= \int x^{\frac{1}{2}} \cdot (x^{\frac{1}{3}} - 2)\,dx =$

$= \int x^{\frac{3+2}{6}} - 2x^{\frac{1}{2}}\,dx = \int x^{\frac{5}{6}} - 2x^{\frac{1}{2}}\,dx$

$= \frac{x^{\frac{11}{6}}}{\frac{11}{6}} - \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} =$

$= \frac{6}{11}\sqrt[6]{x^{11}} - \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C$

Scanned by CamScanner

Řešení D:

1) $-1 \leq \frac{x-3}{2} \leq 1$

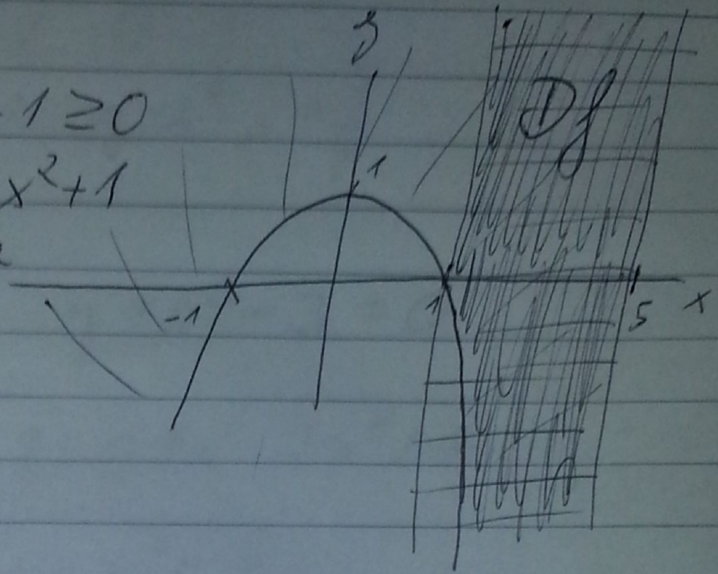
$-2 \leq x-3 \leq 2$

$1 \leq x \leq 5$

$y + x^2 - 1 \geq 0$

$y \geq -x^2 + 1$

parabola



2) $f'_x = 2x\cos 3y - \frac{y}{x}$

$f'_y = -x^2 \cdot \sin 3y \cdot 3 - \ln x$

$f''_{xx} = 2\cos 3y - (y \cdot (-x^{-2})) = 2\cos 3y + \frac{y}{x^2}$

$f''_{xy} = -2x \sin 3y \cdot 3 - \frac{1}{x} = f''_{yx}$

$f''_{yy} = -x^2 \cdot \cos 3y \cdot 3 \cdot 3 - 0 = -9x^2 \cos 3y$

3) Jakobián

$\begin{vmatrix} -8 & 6 \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 0$

$-16y - 12x = 0$

$-16y = 12x$

$-\frac{16}{12}y = x$

$-\frac{4}{3}y = x$

$x^2 + y^2 = 100$

$(-\frac{4}{3}y)^2 + y^2 = 100$

$\frac{16}{9}y^2 + y^2 = 100 \quad / \cdot 9$

$16y^2 + 9y^2 = 900$

$25y^2 = 900$

$y^2 = 36$

$y = \pm 6 \quad A[-8, 6] \quad f(A) = -8 \cdot (-8) + 6 \cdot 6 - 5 = 125$ abs. MAX

$x = -\frac{4}{3}y \quad B[8, -6] \quad f(B) = -64 + (-36) - 5 = -105$ abs. MIN

4) $\int x \cdot \ln x \, dx = \begin{vmatrix} u = \ln x & v' = x \\ u' = \frac{1}{x} & v = \frac{x^2}{2} \end{vmatrix}$

$= \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} dx =$

$= \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{1}{2} x \, dx =$

$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$

Scanned by CamScanner