

2. zápočtová písemka z Matematiky 2/CF2

Úloha 1: Vyřešte:

$$\int x \left(e^x + \sqrt{4x^2 + 5} \right) dx$$

Úloha 2: Spočtete

$$\int \frac{10x - 2}{x^2 - 4x + 13} dx$$

Úloha 3: Určete obsah rovinného obrazce ohraničeného grafy funkcí

$$y = 4, \quad y = x - 2 \quad \text{a} \quad y = 4 - x^2.$$

Úloha 4: Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$y' + 3x^2 y = (4x - x^2) e^{-x^3}$$

Úloha 5: Najděte obecné řešení diferenciální rovnice:

$$y'' - 4y' + 8y = -6x^2 + 5x + 9$$

Řešení písemného testu z Matematiky 2 CF2

Řešení 1. úlohy: Int08

$$I = \int x (e^x + \sqrt{4x^2 + 5}) dx = \int x e^x dx + \int x \sqrt{4x^2 + 5} dx = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \int x e^x dx = \left| \begin{array}{l} u' = e^x \quad v = x \\ u = e^x \quad v' = 1 \end{array} \right| = x e^x - e^x + C_1$$

$$I_2 = \int x \sqrt{4x^2 + 5} dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{4x^2 + 5} = t \\ 4x^2 + 5 = t^2 \\ 8x dx = 2t dt \end{array} \right| = \frac{1}{4} \int t^2 dt = \frac{1}{12} \sqrt{(4x^2 + 5)^3} + C_2$$

$$I = e^x (x - 1) + \frac{1}{12} \sqrt{(4x^2 + 5)^3} + C$$

Řešení 2. úlohy: ir1.z.75

$$(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = -36 < 0 \quad (x^2 - 4x + 13)' = 2x - 4$$

$$\int \frac{10x - 2}{x^2 - 4x + 13} dx = \int \left(\frac{5 \cdot (2x - 4)}{x^2 - 4x + 13} + \frac{18}{x^2 - 4x + 13} \right) dx$$

$$I_1 = \left| \begin{array}{l} t = x^2 - 4x + 13 \\ dt = 2x - 4 \end{array} \right| = 5 \cdot \ln(x^2 - 4x + 13) + C$$

$$I_2 = \int \frac{18}{(x - 2)^2 + 9} dx = \left| \begin{array}{l} x - 2 = 3t \\ 1 dx = 3 dt \end{array} \right| = 2 \cdot \frac{3}{1} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = 6 \cdot \arctg \frac{x - 2}{3} + C$$

Řešení 3. úlohy: PLOCHA14

$$y = 4, \quad y = x - 2 \quad a \quad y = 4 - x^2.$$

Průsečíky:

$$x - 2 = 4 - x^2 \Rightarrow x_1 = 2, \quad x_2 = -3$$

$$x - 2 = 4 \Rightarrow x = 6$$

$$P = P_1 + P_2 = \int_0^2 (4 - (4 - x^2)) dx + \frac{4 \cdot 4}{2}$$

$$P_1 = \int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

$$P_2 = 8$$

$$P = \frac{8}{3} + 8 = \frac{32}{3}$$

Řešení 4. úlohy: DR1VAR33

$$y' + 3x^2 y = (4x - x^2) e^{-x^3}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$y' + 3x^2 y = 0, \quad \int \frac{dy}{y} = -3 \int x^2 dx, \quad \ln|y| = -x^3 + C$$

$$y_h = K \cdot e^{-x^3}, \quad K \in \mathbb{R}, \quad y = K(x) e^{-x^3}$$

$$K'(x) e^{-x^3} + K(x) e^{-x^3} (-3x^2) + 3x^2 K(x) e^{-x^3} = (4x - x^2) e^{-x^3}$$

$$K'(x) = 4x - x^2, \quad K(x) = 2x^2 - \frac{1}{3}x^3 + C$$

$$y = (2x^2 - \frac{1}{3}x^3 + C) \cdot e^{-x^3}$$

Řešení 5. úlohy: dr2-komplex20.TEX $y'' - 4y' + 8y = 0$

$$k^2 - 4k + 8 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = 2 \pm 2i$$

$$u(x) = e^{2x} \cdot (C_1 \cdot \cos 2x + C_2 \cdot \sin 2x)$$

$$v(x) = Ax^2 + Bx + C$$

$$v'(x) = 2Ax + B$$

$$v''(x) = 2A$$

$$2A - 4(2Ax + B) + 8(Ax^2 + Bx + C) = -6x^2 + 5x + 9$$

$$A = \frac{-6}{8} = -\frac{3}{4} \quad B = \frac{5 + 4 \cdot 2 \cdot (-\frac{3}{4})}{8} = -\frac{1}{8} \quad C = \frac{9 + 4 \cdot (-\frac{1}{8}) + \frac{3}{4} \cdot 2}{8} = \frac{5}{4}$$

$$y = e^{2x} \cdot (C_1 \cdot \cos 2x + C_2 \cdot \sin 2x) - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{8}x + \frac{5}{4}$$

Zadání písemného testu z Matematiky 2 CF2

Úloha 1: Vypočtete

$$\int \arcsin 4x \, dx$$

Úloha 2:

Vypočtete: $\int \frac{-x^3 + 7x^2 - 7x - 17}{x^2 - 7x + 12} \, dx$

Úloha 3: Určete objem rotačního tělesa, které vznikne rotací obrazce ohraničeného křivkami

$$y = 4 - x^2, \quad y = x + 2$$

kolem osy x .

Úloha 4: Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$y' \cos x + y \cdot \sin x = 3$$

Úloha 5: Najděte obecné řešení diferenciální rovnice:

$$y'' + 4y = (10x + 1)e^{-x}$$

Řešení písemného testu z Matematiky 2 CF2

Řešení 1. úlohy: 4a3

$$I = \int \arcsin 4x \, dx$$

$$\begin{aligned} I &= \left| \begin{array}{ll} u' = 1 & v = \arcsin 4x \\ u = x & v' = \frac{4}{\sqrt{1-16x^2}} \end{array} \right| = x \arcsin 4x - \int \frac{4x}{\sqrt{1-16x^2}} \, dx = \\ &= \left| \begin{array}{ll} \sqrt{1-16x^2} = t & \\ 1-16x^2 = t^2 & \\ -32x \, dx = 2t \, dt & \end{array} \right| = x \arcsin 4x + \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t} = \\ &= x \arcsin 4x + \frac{1}{4} \cdot \sqrt{1-16x^2} + C \end{aligned}$$

Řešení 2. úlohy:

$$\begin{aligned} \text{NIRL13B} \quad \int \frac{-x^3 + 7x^2 - 7x - 17}{x^2 - 7x + 12} \, dx &= \int \left(-x + \frac{5x - 17}{x^2 - 7x + 12} \right) \, dx = \\ &= \int \left(-x + \frac{2}{x-3} + \frac{3}{x-4} \right) \, dx = \frac{-x^2}{2} + 2 \ln |x-3| + 3 \ln |x-4| + C \end{aligned}$$

Řešení 3. úlohy: OBJEM09

$$y = 4 - x^2, \quad y = x + 2$$

$$\begin{aligned} 4 - x^2 = x + 2 &\Rightarrow x = -2 \vee x = 1 \\ V &= \pi \int_{-2}^1 (4 - x^2)^2 \, dx - \pi \int_{-2}^1 (x + 2)^2 \, dx = \\ &= \pi \left[16x - \frac{8x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right]_{-2}^1 - \pi \left[\frac{x^2}{2} + 2x^2 + 4x \right]_{-2}^1 = \frac{1234}{15} \pi \end{aligned}$$

Řešení 4. úlohy: DR1VAR07

$$y' \cos x + y \cdot \sin x = 3$$

$$y' + y \cdot \operatorname{tg} x = \frac{3}{\cos x}, \quad x \in \left((2l-1)\frac{\pi}{2}, (2l+1)\frac{\pi}{2} \right) \quad l \in \mathbb{Z}$$

$$y' + y \cdot \operatorname{tg} x = 0 \quad \int \frac{dy}{y} = - \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx$$

$$\ln |y| = \ln |\cos x| + c \quad y_h = K \cos x \quad K \in \mathbb{R} \quad y = K(x) \cos x$$

$$K'(x) \cos x - K(x) \sin x + K(x) \sin x = \frac{3}{\cos x}$$

$$K'(x) = \frac{3}{\cos^2 x} \quad K(x) = 3 \operatorname{tg} x + C$$

$$y = (3 \operatorname{tg} x + C) \cdot \cos x = 3 \sin x + C \cos x$$

Řešení 5. úlohy: Dr05

$$y'' + 4y = (10x + 1)e^{-x}$$

$$k^2 + 4 = 0 \Rightarrow k_1 = +2i, k_2 = -2i \quad u(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

$$v(x) = (Ax + B)e^{-x} \quad v'(x) = (A - Ax - B)e^{-x}$$

$$v''(x) = (-2A + Ax + B)e^{-x}$$

$$-2A + Ax + B + 4Ax + 4B = 10x + 1$$

$$5A = 10 \rightarrow A = 2$$

$$-2A + 5B = 1 \rightarrow B = 1$$

$$v(x) = (2x + 1)e^{-x} \quad y = u(x) + v(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + (2x + 1)e^{-x}$$