

- 1) Načrtněte definiční obor funkce:

$$f(x, y) = \arccos \frac{x-2}{3} + \sqrt{25-x^2-y^2}$$

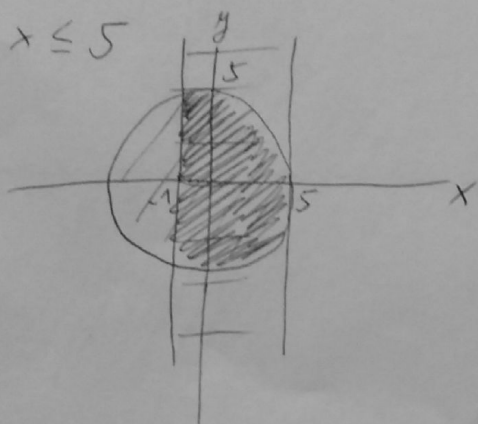
- 2) Vypočítejte neurčitý integrál:

$$\int x^3 \ln x \, dx$$

- 3) Určete rovnici tečné roviny k funkci
- $z = \frac{x^2}{2} - 2xy + \frac{2}{y}$
- v bodě
- $T[2; 1]$
- .

- 4) Určete vázané extrémy funkce
- $z = 6 + xy$
- s vazební podmínkou
- $x - y - 2 = 0$
- .

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad -1 &\leq \frac{x-2}{3} \leq 1 & 25 - x^2 - y^2 &\geq 0 \\ -3 &\leq x-2 \leq 3 & 25 &\geq x^2 + y^2 \\ -1 &\leq x \leq 5 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \int x^3 \ln x \, dx &= \left| \begin{array}{l} u = \ln x \quad u' = \frac{1}{x} \\ v = x^3 \quad v' = \frac{3x^2}{1} \end{array} \right| \\ &= \frac{x^4}{4} \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^4}{4} \, dx = \\ &= \frac{x^4}{4} \ln x - \int \frac{1}{4} x^3 \, dx = \\ &= \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16} + C \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} \quad z_0 = \frac{4}{2} - 2 \cdot 2 \cdot 1 + \frac{2}{1} = 2 - 4 + 2 = 0$$

$$\begin{aligned} f'_x &= x - 2y \\ f'_y &= -2x + 2 \cdot (-y^{-2}) = -2x - \frac{2}{y^2} \\ f'_x(T) &= 0 \\ f'_y(T) &= -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L: z &= 0(x-2) - 6(y-1) + 0 \\ z &= -6y + 6 \end{aligned}$$

$$\textcircled{4} \quad \begin{array}{l} x - y - 2 = 0 \\ x = y + 2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} z &= 6 + xy \\ h(y) &= 6 + (y+2) \cdot y = 6 + y^2 + 2y \\ h'(y) &= 2y + 2 \\ 2y + 2 &= 0 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

nač. MIN

$$[1; -1]$$

$$\begin{array}{c} - \quad \vee \quad + \\ \hline -1 \end{array}$$

$$x = y + 2 = -1 + 2 = 1$$

- 1) Načrtněte definiční obor funkce:

$$f(x, y) = \frac{\ln(2x - y + 1)}{\sqrt{x + 1}}$$

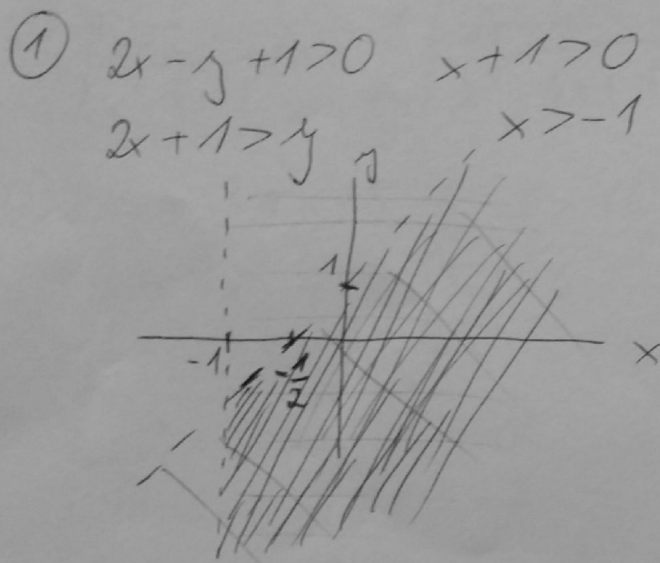
- 2) Najděte lokální extrémy funkce:

$$z = 2x^3 - 3xy + 2y^3 + 1$$

- 3) Vypočítejte neurčitý integrál:

$$\int \frac{(\sqrt{x} + 3)^2}{x} dx$$

- 4) Určete rovnici normály k funkci
- $z = x^2y^3 + x^3y^2 + x$
- v bodě
- $T[1; -1]$
- .



②

$$z = 2x^3 - 3xy + 2y^3 + 1$$

$$z'_x = 6x^2 - 3y$$

$$z'_y = -3x + 6y^2$$

$$6x^2 - 3y = 0 \rightarrow 6x^2 = 3y$$

$$-3x + 6y^2 = 0 \rightarrow 2x^2 = y$$

$$-3x + 6(2x^2)^2 = 0$$

$$-3x + 6 \cdot 4x^4 = 0$$

$$3x \cdot (-1 + 8x^3) = 0$$

$$x = 0 \quad -1 + 8x^3 = 0$$

$$x^3 = \frac{1}{8}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$A[0; 0]$$

$$B[\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$$

$$H = \begin{vmatrix} 12x & -3 \\ -3 & 12y \end{vmatrix}$$

$$A: \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} < 0 \text{ není extr. (saddl)}$$

$$B: \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} > 0 \text{ lok. MIN}$$

③

$$\int \frac{x + 6\sqrt{x} + 9}{x} dx = \int 1 + \frac{6x^{\frac{1}{2}}}{x} + \frac{9}{x} dx$$

$$= \int 1 + 6x^{-\frac{1}{2}} + \frac{9}{x} dx =$$

$$= x + 6 \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + 9 \ln|x| =$$

$$= x + 12\sqrt{x} + 9 \ln|x| + C$$

④

$$z_0 = -1 + 1 + 1 = 1$$

$$f'_x = 2xy^3 + 3x^2y^2 + 1$$

$$f'_y = 3x^2y^2 + 2x^3y$$

$$f'_x(T) = -2 + 3 + 1 = 2$$

$$f'_y(T) = 3 - 2 = 1$$

$$x = 1 + 2t$$

$$y = -1 + t$$

$$z = 1 - t$$

1) Vypočítejte neurčitý integrál:

$$\int \frac{x-2}{x^2-4x+1} dx$$

2) Určete rovnici tečné roviny k funkci $z = 3x^3 - 2x^2y + 5xy^2 - 6x + 5y + 10$ v bodě $T[1; -1]$.3) Určete vázané extrémy funkce $z = 6 - 4x - 3y$ s vazební podmínkou $x^2 + y^2 = 1$.

4) Určete všechny parciální derivace druhého řádu funkce:

$$f(x, y) = e^{x^2} (2 - \cos y)$$

$$\textcircled{1} \int \frac{x-2}{x^2-4x+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x-4}{x^2-4x+1} dx = \frac{1}{2} \ln |x^2-4x+1| + C$$

$$\textcircled{2} z_0 = 3 + 2 + 5 - 6 - 5 + 10 = 9$$

$$f'_x = 9x^2 - 4xy + 5y^2 - 6$$

$$f'_y = -2x^2 + 10xy + 5$$

$$f'_x(T) = 9 + 4 + 5 - 6 = 12$$

$$f'_y(T) = -2 - 10 + 5 = -7$$

$$L: z = 12(x-1) - 7(y+1) + 9$$

$$\textcircled{3} \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 0$$

$$-8y + 6x = 0$$

$$-8y = -6x$$

$$\frac{8y}{6} = x$$

$$\frac{4y}{3} = x$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$\left(\frac{4}{3}y\right)^2 + y^2 = 1$$

$$\frac{16}{9}y^2 + y^2 = 1$$

$$16y^2 + 9y^2 = 9$$

$$y^2 = \frac{9}{25}$$

$$y = \pm \frac{3}{5}$$

$$f(A) = 6 - 4 \cdot \frac{4}{5} - 3 \cdot \frac{3}{5} = \frac{30 - 16 - 9}{5} = 1$$

$$f(B) = 6 + 4 \cdot \frac{4}{5} + 3 \cdot \frac{3}{5} = \frac{30 + 16 + 9}{5} = 11$$

A... val. MIN

B... val. MAX

$$\textcircled{4} f'_x = e^{x^2} \cdot 2x \cdot (2 - \cos y)$$

$$f'_y = e^{x^2} \cdot \sin y$$

$$f''_{xx} = e^{x^2} \cdot 2x \cdot 2x \cdot (2 - \cos y) + e^{x^2} \cdot 2 \cdot (2 - \cos y)$$

$$f''_{xy} = e^{x^2} \cdot 2x \cdot \sin y$$

$$f''_{yx} = e^{x^2} \cdot 2x \cdot \sin y$$

$$f''_{yy} = e^{x^2} \cdot \cos y$$

- 1) Načrtněte definiční obor funkce:

$$f(x, y) = \arcsin \frac{y+1}{4} + \sqrt{2-x+y}$$

- 2) Najděte lokální extrémy funkce:

$$z = 6xy - x^3 - y^2 + 2$$

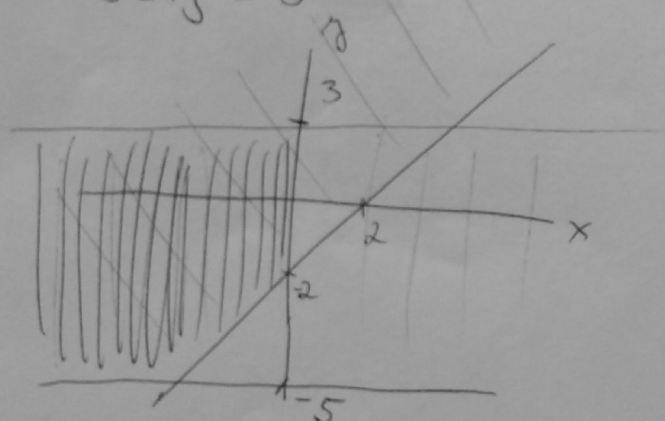
- 3) Vypočítejte neurčitý integrál:

$$\int x \sin x \, dx$$

- 4) Určete všechny parciální derivace prvního řádu funkce:

$$f(x, y) = (2x - \arcsin y) \cdot \ln y$$

① $-1 \leq \frac{y+1}{4} \leq 1$ $2-x+y \geq 0$
 $-4 \leq y+1 \leq 4$ $y \geq x-2$
 $-5 \leq y \leq 3$



② $r'_x = 6y - 3x^2$
 $r'_y = 6x - 2y$

$$6y - 3x^2 = 0$$

$$6x - 2y = 0 \rightarrow 3x = y$$

$$6 \cdot 3x - 3x^2 = 0$$

$$3x(6 - x) = 0$$

$$x = 0 \quad x = 6$$

$$A[0, 0] \quad B[6, 18]$$

③ $\int x \sin x \, dx = \left| \begin{array}{l} u = x \quad v' = \sin x \\ u' = 1 \quad v = -\cos x \end{array} \right|$

$$= -x \cos x - \int -\cos x \, dx =$$

$$= -x \cos x + \sin x + C$$

$$H = \begin{vmatrix} -6x & 6 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} \quad A: \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} < 0 \text{ sedlo}$$

$$B: \begin{vmatrix} -36 & 6 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} > 0 \text{ lok. MAX}$$

④ $f'_x = 2 \cdot \ln y$
 $f'_y = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \cdot \ln y + (2x - \arcsin y) \cdot \frac{1}{y}$

- 1) Načrtněte definiční obor funkce:

$$f(x, y) = \arccos \frac{x}{2} + \sqrt{4 - x^2 + y}$$

- 2) Najděte lokální extrémů funkce:

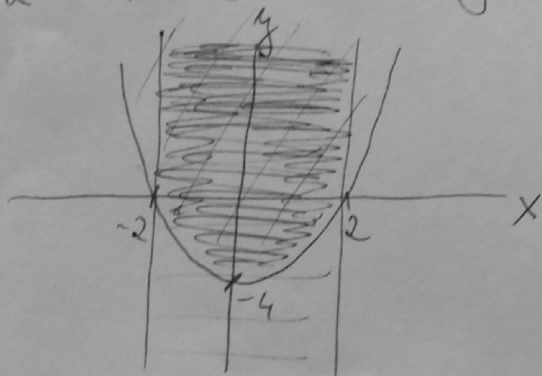
$$z = x^3 + y^3 - 3xy$$

- 3) Vypočítejte neurčitý integrál:

$$\int \sqrt[3]{x} \left(2 - \frac{1}{x} + \sqrt{x^3} \right) dx$$

- 4) Určete rovnici tečné roviny k funkci
- $z = \ln(x^2 - 3y)$
- v bodě
- $T[2; 1]$
- .

① $-1 \leq \frac{x}{2} \leq 1$ $4 - x^2 + y \geq 0$
 $-2 \leq x \leq 2$ $y \geq x^2 - 4$



② $R'_x = 3x^2 - 3y$

$R'_y = 3y^2 - 3x$

$3x^2 - 3y = 0 \rightarrow x^2 = y$

$3y^2 - 3x = 0$

$3 \cdot (x^2)^2 - 3x = 0$

$3x^4 - 3x = 0$

$3x(x^3 - 1) = 0$

$\downarrow \quad \downarrow$
 $x=0 \quad x=1$

$A[0, 0] \quad B[1, 1]$

$H = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix}$

$A: \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} < 0$ sedlo

$B: \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} > 0$

lok. MIN

③ $\int x^{\frac{1}{3}} \left(2 - x^{-1} + x^{\frac{3}{2}} \right) dx$

$= \int 2x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{2}{3}} + x^{\frac{2+9}{6}} dx$

$= 2 \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + \frac{x^{\frac{17}{6}}}{\frac{17}{6}} = \frac{3}{2} \frac{\sqrt[3]{x^4} - 3\sqrt[3]{x} + \frac{6}{17}\sqrt[6]{x^{17}}}{6} + C$

④ $R_0 = \ln(4-3) = 0$

$f'_x = \frac{1}{x^2-3y} \cdot 2x$

$f'_x(T) = 4$

$f'_y = \frac{1}{x^2-3y} \cdot (-3)$

$f'_y(T) = -3$

$\Delta: R = 4(x-2) - 3(y-1) + 0$