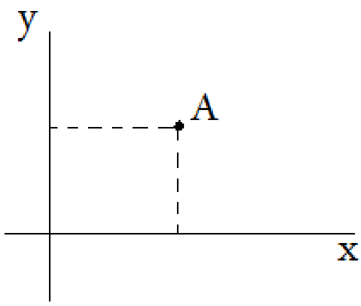
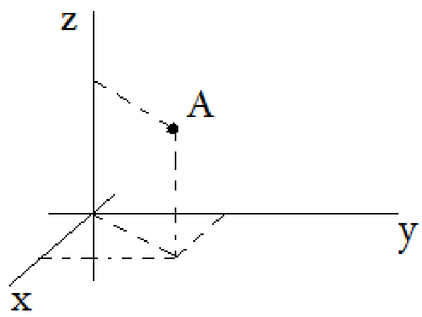
Analytická geometrie

- body a vektory
- rovnice přímky
- vzájemná poloha přímek
- kuželosečky

Body a vektory

souřadnice bodu
A [x,y] – rovina
A[x,y,z] - prostor



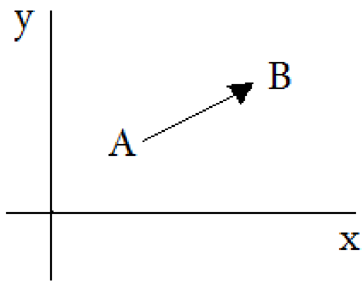


vektor

udává směr a délku

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A$$

operace s vektory:



sčítání, odčítání
(2,3) + (-1,4) = (1,7)

násobení skalárem
2*(-3,4) = (-6,8)

skalární součin
$u * v = (u_1,u_2) * (v_1,v_2) = u_1v_1 + u_2v_2$

délka vektoru

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

vzdálenost dvou bodů AB = délka vektoru AB

$$|\vec{u}| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(B_1 - A_1)^2 + (B_2 - A_2)^2}$$

střed úsečky AB

$$S = \left[\frac{A_1 + B_1}{2}; \frac{A_2 + B_2}{2}\right]$$

úhel mezi vektory

$$\cos\alpha = \frac{u.v}{|u|.|v|} = \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

kolmost vektorů
u * v = 0
$u_1v_1 + u_2v_2 = 0$

Jak získáme vektor kolmý k vektoru u?
kolmý vektor k u (u_1,u_2) získáme tak, že v původním vektoru přehodíme souřadnice a změníme jedno znaménko: $(u_2, -u_1)$

rovnoběžnost vektorů
vektory u, v jsou rovnoběžné, když platí: $u =(u_1,u_2)$, $v=(k*u_1,k*u_2)$

Příklady:

1) Dokažte, že je trojúhelník KLM pravoúhlý. K[4;3], L[12;9], M[1;7]
   a) pomocí Pythagorovy věty
   b) přes kolmé vektory

2) KLMN je rovnoběžník, urči souřadnice bodu N.
   K[2,-2], L[-1,0], M[0,3]

   [N[3,1]]

3) Na ose x najděte bod, který má stejnou vzdálenost od počátku jako od bodu A[-3,6].

   [[-7,5;0]]

rovnice přímky

- parametrická rovnice

  $x = A_1 + u_1 * t$
  $y = A_2 + u_2 * t$

  A $[A_1, A_2]$ jsou souřadnice bodu ležícího na přímce
  u (u_1, u_2) je směrový vektor přímky (získáme jej odečtením bodů ležících na přímce)
  t je parametr

  Pokud máme úsečku AB, a do rovnice dosadíme bod A, a vektor získáme odečtením bodů B – A, potom parametr funguje tak, že když do rovnic za něj dosadíme např. ½, dostaneme souřadnice středu přímky. Toto využijeme např. při výpočtu těžiště, kde dosadíme 1/3 (resp. 2/3).

- obecná rovnice

  $ax + by + c = 0$

  n (a,b) je normálový vektor přímky (normálový vektor je kolmý na směrový vektor, tedy ho získáme tak, že vytvoříme kolmý vektor na vektor směrový)

  c – zjistíme, když do rovnice dosadíme za x, y souřadnice libovolného bodu ležícího na přímce

- směrnicová rovnice

  $y = kx + q$

  tento tvar získáme z obecné rovnice, když vyjádříme y

  $k = \mathrm{tg}\ \alpha$

  parametr k určuje směr přímky, úhel α je úhel, který svírá daná přímka s osou x

Vzdálenost bodu M od přímky p

p: $ax + by + c = 0$
M[m,n]

$$vzd = \frac{|am + bn + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Vzájemná poloha dvou přímek

- řešíme jako soustavu rovnic
- přímky buď:
  - nemají žádný společný bod = jsou rovnoběžné (různé)
  - mají 1 spol. bod = jsou různoběžné
  - mají nekonečně mnoho společných bodů = splývají (totožné)

Příklady:

1) Leží bod C[-1;2] na přímce AB? A[2;-3], B[0;1]

2) Napište obecnou rovnici přímky: $x = 2 - 3t$, $y = -1 + t$

3) Napište parametrickou rovnici přímky: $2x - y + 3 = 0$

4) Určete, jaký úhel svírá přímka $x - y + 5 = 0$ s osou x.

5) Je dán trojúhelník ABC. A[3;-1], B[2;3], C[6;1]
    a. Určete obecnou rovnici výšky na stranu c.
    b. Určete souřadnice těžiště trojúhelníku ABC.

6) Určete obecnou i parametrickou rovnici přímky p, která prochází bodem A[2;3] a je
    a. rovnoběžná s přímkou $2x - 3y + 1 = 0$
    b. kolmá na přímku $2x + 5y - 2 = 0$

7) Napište obecnou rovnici přímky p, která prochází bodem A[1;3], a také prochází průsečíkem přímek: $3x + 4y - 1 = 0$, $2x + y - 4 = 0$.

8) Určete vzájemnou polohu přímek:
    a. $3x + 4y + 1 = 0$ $\quad$ $x - y - 2 = 0$
    b. $x + 2y - 3 = 0$ $\quad$ $x = 7 - 2t$, $y = -1 + t$
    c. $x = 2 - t$, $y = 1 + 3t$ $\quad$ $x = -1 + u$, $y = 10 - 3u$

kuželosečky

kružnice

poloměr r
střed S [m;n]

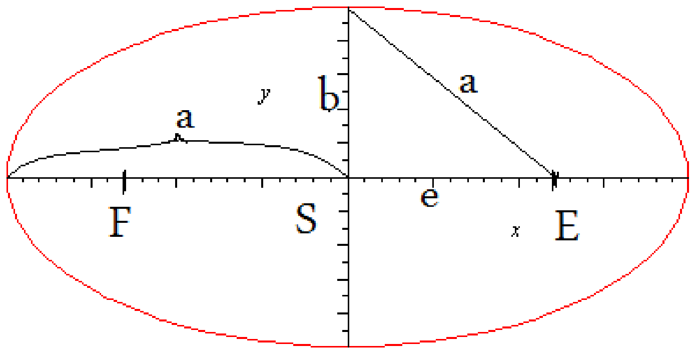
$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$

$$(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$$

elipsa
= součet vzdáleností od bodů F, E je stejný (2a)

hlavní poloosa velikosti a je v ose x, vedlejší poloosa velikosti b je v ose y
střed S [m;n]

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$



hlavní poloosa velikosti a je v ose y,
vedlejší poloosa velikosti b je v ose x
střed S [m;n]

$$\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1$$

$9x^2 + 25y^2 - 126x + 300y + 1116 = 0$

e je lineární výstřednost (excentricita)

$$e = \sqrt{a^2 - b^2}$$

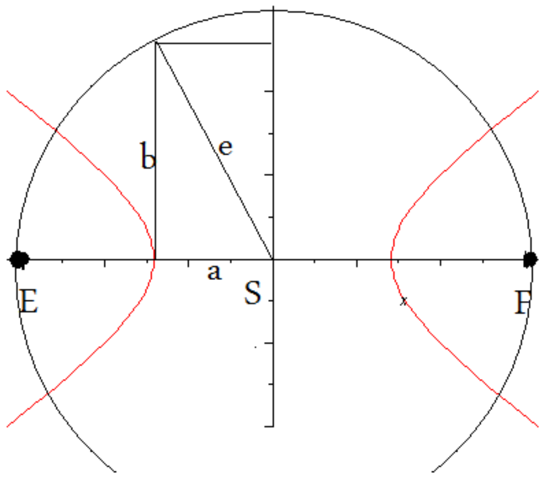
hyperbola
= rozdíl vzdáleností od bodů E, F je stejný (2a)

a je velikost hlavní poloosy
b je velikost vedlejší poloosy

rovnoosá = obě asymptoty jsou na sebe kolmé a a = b

střed S [m;n]

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$



$4x^2 - y^2 + 2y - 17 = 0$

EF je rovnoběžné s osou y:

$$-\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1$$

e je lineární výstřednost (excentricita)

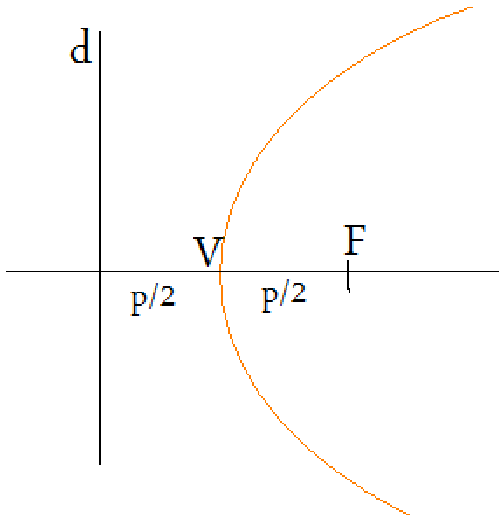
$$e = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 6 = 0$
toto není kuželosečka

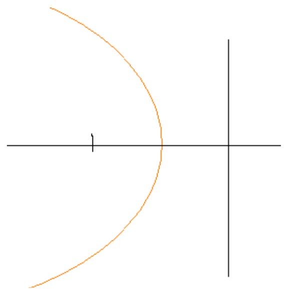
parabola
= stejná vzdálenost od bodu F a přímky d

vrchol V [m, n]
ohnisko F
d řídící přímka
p parameter

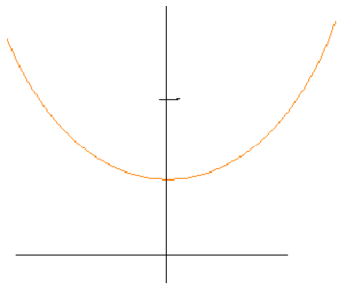
$(y-n)^2 = 2p(x-m)$



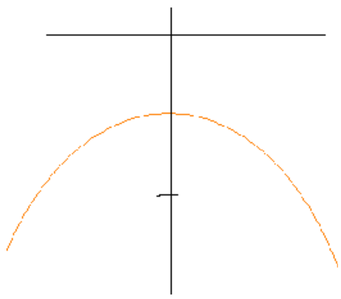
$(y-n)^2 = -2p(x-m)$



$(x - m)^2 = 2p(y - n)$



$(x - m)^2 = -2p(y - n)$



$\boxed{y^2 + 6x - 18 = 0}$

Příklady:

1) Jaká křivka je definována následující rovnicí?
   (Určete střed, poloosy, excentricitu, poloměr, parametr, vrchol, ohniska)

   a) $x^2 + y^2 – 4x – 2y – 20 = 0$
   [kružnice, S[-2;1], r=5]

   b) $4x^2 + 9y^2 + 8x – 54y + 49 = 0$
   [elipsa, S[-1,3], a = 3, b = 2]

   c) $x^2 - y^2 – 4x – 6y – 14 = 0$
   [hyperbola, S[2;-3], a = 3, b = 3]

   d) $y^2 – 4y – 4x = 0$
   [parabola, V[-1,2], p = 2]

2) Určete vzájemnou polohu přímky a kuželosečky: (sečna, tečna, vnější přímka)
   a. $3x – y + 2 = 0$, $x^2 + 4y^2 = 16$
   b. $x – y + 10 = 0$, $2x^2 + 5y^2 = 40$

   [sečna, vnější přímka]

3) Pro jaké t je přímka $y = x + t$ tečnou elipsy $9x^2 + 16y^2 = 144$?
   [-5, +5]